Technische Universität Wien Sommer 2010
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

# Übungsblatt 7 zur Vorlesung
# Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

**Aufgabe 24:**
Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion mit der Wachstumsbedingung

$$|f(x,u)| \le C|u|^{p-1} + h(x) \quad \text{für } x \in \Omega,\ x \in \mathbb{R},$$

wobei $C > 0$, $p > 1$ und $h \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$. Definiere den sogenannten *Nemyckii-Operator* $F(u)(x) = f(x, u(x))$ für $x \in \Omega$, $u \in X = L^p(\Omega)$. Zeigen Sie:

(i) $F : X \to X'$ ist wohldefiniert und

$$\|F(u)\|_{X'} \le C(\|h\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}).$$

(ii) Wenn $f(x,u)u \ge \alpha|u|^p$ für $x \in \Omega$ und $u \in \mathbb{R}$, dann ist $F$ koerziv.

**Aufgabe 25:**
Seien $V$ ein reflexiver Banachraum sowie $A : V \to V'$ und $B : V \to V'$ zwei Operatoren. Zeigen Sie: Ist $A$ vom Typ M und $B$ linear und kompakt (insbesondere stetig), so ist $A+B$ vom Typ M.

**Aufgabe 26:**
Seien $V$ ein reflexiver Banachraum mit Basis $(v_k)$, $f \in V'$ und $A : V \to V'$ ein beschränkter und streng monotoner Operator vom Typ M. Weiter sei $u_m \in V_m$ eine Lösung von

$$\langle A(u_m), v_k \rangle_{V'} = \langle f, v_k \rangle_{V'}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

wobei $V_m = \text{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, und es gebe eine Konstante $C > 0$, so daß $\|u_m\|_V \le C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Folge $(u_m)$ konvergiert in $V$ gegen $u \in V$ und $u$ ist die eindeutige Lösung von $A(u) = f$ in $V'$.

**Aufgabe 27:**
Sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lipschitzstetige Funktion mit beschränkter Ableitung und $b(0) = 0$. Zeigen Sie: Wenn $u \in H^1_0(\Omega)$, dann ist $b(u) \in H^1_0(\Omega)$.

Korrektur in den Übungen am 18.05.2010.