Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2010

Übungsblatt 8 zur Vorlesung
Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 28:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $0 < s < 1$ und $1 < p < \infty$. Seien ferner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine hölderstetige Funktion mit $f(0) = 0$, d.h. $|f(x) - f(y)| \le c_H|x - y|^\theta$ für alle x, $y \in \mathbb{R}$, wobei $c_H > 0$ und $\theta \in (0, 1)$, und $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\|f(u)\|_{W^{\theta s,p/\theta}(\Omega)} \le c_H\|u\|^\theta_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Aufgabe 29:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $u_0 > 0$. Betrachten Sie das Problem

$$u_t = \Delta \ln u \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 1 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Unter der Annahme, daß dieses Problem eine reguläre und in Ω positive Lösung besitzt, zeigen Sie die Abschätzungen $u \le \max\{1, \sup_\Omega u_0\}$ und

$$\|\nabla\sqrt{u}\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \le \frac{1}{\sqrt{8}}\|u_0 - 1\|_{L^2(\Omega)},$$
$$\|\nabla \ln u\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \le \|u_0(\ln u_0 - 1) + 1\|_{L^1(\Omega)}.$$

Aufgabe 30:
Betrachte die Poröse-Medien-Gleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

mit einer Konstanten $\gamma > 1$ und sei $u \ge 0$ eine glatte Lösung mit $\lim_{|x|\to\infty} u(x, t) = 0$ und $\lim_{|x|\to\infty} \nabla u(x, t) = 0$.

(i) Sei $\alpha + 1 = \alpha\gamma + 2\beta$. Leiten Sie für die Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $u(x, t) = t^{-\alpha}v(t^{-\beta}|x|)$, eine gewöhnliche Differentialgleichung her.

(ii) Berechnen Sie eine radialsymmetrische Lösung der Poröse-Medien-Gleichung für den Fall $\alpha = n\beta$. (Hinweis: Multiplizieren Sie die gewöhnliche Differentialgleichung zuerst mit $r^{n-1} = |x|^{n-1}$ und integrieren Sie die resultierende Gleichung.)

(iii) Welche Regularität hat diese radialsymmetrische Lösung?

Aufgabe 31:
Sei (u, p) eine klassische Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ &u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand sei. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $\lambda > 0$, so daß

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad t > 0.$$

Korrektur in den Übungen am 01.06.2008.