

## Übungsblatt 9 zur Vorlesung Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

### Aufgabe 32:

Zeigen Sie, daß die kubische Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u - |u|^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(\cdot, 0) = u_0,$$

höchstens eine beschränkte glatte Lösung besitzt.

### Aufgabe 33:

Sei  $u$  eine glatte Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u + |u|^\alpha u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

mit  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $xu_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $4/n \leq \alpha < 4/(n-2)$  ( $4/n \leq \alpha < \infty$ , wenn  $n \leq 2$ ). Wir nehmen an, daß  $xu(x, t)$  und  $\|xu(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$  glatte Funktionen sind. Die Energie von  $u$  ist definiert durch

$$E(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 - \frac{1}{\alpha + 2} |u(x, t)|^{\alpha+2} \right) dx.$$

Wir wissen bereits, daß  $E(u(t)) = E(u_0)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

(i) Zeigen Sie:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u(x, t)|^2 dx = 4n\alpha E(u_0) - 2(n\alpha - 4) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x, t)|^2 dx.$$

(ii) Sei  $E(u_0) < 0$ . Folgern Sie, daß die obige Schrödinger-Gleichung *keine glatte* zeitlich globale Lösung besitzen kann.

### Aufgabe 34:

Betrachte die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$|u_x| - 1 = 0 \quad \text{in } (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Zeigen Sie, daß  $u(x) = \frac{1}{2} - |\frac{1}{2} - |x||$  für  $x \in [-1, 1]$  *keine* Viskositätslösung ist.

**Aufgabe 35:**

Wir sagen, daß  $u$  eine *Viskositätssublösung* (*Viskositätssuperlösung*) von

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ist, wenn für alle  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt: Besitzt  $u - v$  ein lokales Maximum (Minimum) an  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , dann ist

$$H(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0)) \leq 0 \quad (\geq 0).$$

Zeigen Sie:

(i) Ist  $u$  eine Viskositätssublösung und eine Viskositätssuperlösung, so ist  $u$  eine Viskositätslösung.

(ii) Sind  $u, w$  Viskositätssublösungen von  $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ , dann ist auch  $\max\{u, w\}$  eine Viskositätssublösung.

(iii) Sind  $u, w$  Viskositätssuperlösungen von  $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ , dann ist auch  $\min\{u, w\}$  eine Viskositätssuperlösung.

Korrektur in den Übungen am 08.06.2010.