ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 1

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Seien X ein Banachraum und $(u_k) \subset X$ eine Folge mit $u_k \rightharpoonup u$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\|u_k\| \to \|u\|$ und ist X ein Hilbertraum, so folgt $u_k \to u$ für $k \to \infty$.

(ii) Ist $(F_k) \in X'$ mit $F_k \to F$ in X', so folgt $\langle F_k, u_k \rangle \to \langle F, u \rangle$.

Aufgabe 2. Seien H ein Hilbertraum und $(u_k) \subset H$ mit $u_k \rightharpoonup u$ $(k \to \infty)$. Zeigen Sie: Es existiert eine Teilfolge (u_{k_j}), so daß der arithmetische Mittelwert

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} u_{k_j}$$

für $m \to \infty$ stark gegen u konvergiert.

Aufgabe 3. Seien X, Y und Z Banachräume mit stetigen Einbettungen $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$. Es existieren $C > 0$ und $0 < \theta < 1$, so daß für alle $u \in X$ gilt:

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Z^{\theta}.$$

Sei ferner $(u_k) \subset X$ beschränkt und $u_k \to u$ in Z für $k \to \infty$. Zeigen Sie:

(i) $u_k \to u$ in Y

(ii) wenn $X \hookrightarrow Z$ kompakt ist, dann ist auch $X \hookrightarrow Y$ kompakt.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die *poröse Medium* – Gleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty)\,, \tag{1}$$

für eine Konstante $\gamma > 1$ und nicht-negative Funktionen $u \geq 0$. Finden Sie eine Lösung dieser Gleichung mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$.

Hinweis: Machen Sie für w den Ansatz $w(x) = |x|^\alpha$ für ein $\alpha > 0$.

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.