ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 2

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 28. MÄRZ, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \le p < \infty$, (u_k) eine Folge mit $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$. Sei (u_k) beschränkt in $L^\infty(\Omega)$ oder $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $f(u_k) \to f(u)$ in $L^p(\Omega)$.

Aufgabe 2. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft $\lim_{|x|\to\infty} f(x)/g(x) = 0$. Ferner sei f monoton wachsend und (u_k) eine Folge messbarer Funktionen mit

$$u_k \to u \quad \text{f.ü. in } \Omega, \qquad \|g(u_k)\|_{L^1(\Omega)} \le C \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie:

$$f(u_k) \to f(u) \quad \text{stark in } L^1(\Omega)\ (k \to \infty).$$

Aufgabe 3. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt $F \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\nabla(F \circ u) = F'(u)\nabla u.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß das Randwertproblem

$$-\Delta u = R_0 - u^2 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \sqrt{R_0} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $R_0 > 0$ genau eine (klassische) positive Lösung besitzt, nämlich $u = \sqrt{R_0}$.

---

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.