ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 3

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 18. APRIL, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $L(u) = -\nabla \cdot (A(x)\nabla u)$ ein elliptischer Differentialoperator mit der Matrix $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ und $f(x,u)$ eine Carathéodory-Funktion. Ferner sei $f(x,\cdot)$ lipschitzstetig im Sinne von

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq f_0|u-v| \quad \text{für } x \in \Omega,\ u,v \in \mathbb{R},$$

wobei $f_0 > 0$. Zeigen Sie, dass unter einer Kleinheitsannahme an f_0 (die zu bestimmen ist) es höchstens eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$L(u) = f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

geben kann.

Aufgabe 2. Betrachten Sie auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ die quasilineare Gleichung

$$-\nabla \cdot (a(u)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $a \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, $a(u) \geq \alpha > 0$ für $u \in \mathbb{R}$ und $f \in L^2(\Omega)$. Definiere den Fixpunktoperator $S : L^2(\Omega) \times [0,1] \to L^2(\Omega)$, $S(v,\sigma) = u$, wobei u die Lösung von

$$-\nabla \cdot (a(v)\nabla u) = \sigma f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

ist. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Leray-Schauder erfüllt sind und schließen Sie die Existenz einer schwachen Lösung der obigen nichtlinearen Gleichung.

Aufgabe 3. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton fallende Funktion mit $f(0) > 0$ und $g \in H^1(\Omega)$ mit $g \geq \gamma > 0$ auf $\partial\Omega$. Sei ferner u eine schwache Lösung von

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie, daß eine Konstante $\gamma_0 > 0$ existiert, so daß $u \geq \gamma_0$ in Ω.

`sabine.hittmeir@tuwien.ac.at`.