ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 5

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 2. MAI, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Sei $u \in H^1(\Omega)$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung von

$$\Delta u = u^4 \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \leq 3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ seien. Zeigen Sie mit Hilfe eines Bootstrapping-Arguments, daß $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 2. Betrachte die Poröse-Medien-Gleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

mit einer Konstanten $\gamma > 1$ und sei $u \geq 0$ eine glatte Lösung mit $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$ und $\lim_{|x|\to\infty} \nabla u(x,t) = 0$.

(i) Sei $\alpha + 1 = \alpha\gamma + 2\beta$. Leiten Sie für die Funktion $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $u(x,t) = t^{-\alpha} v(t^{-\beta}|x|)$, eine gewöhnliche Differentialgleichung für v her.

(ii) Berechnen Sie eine radialsymmetrische Lösung der Poröse-Medien-Gleichung für den Fall $\alpha = n\beta$. (Hinweis: Multiplizieren Sie die gewöhnliche Differentialgleichung zuerst mit $\xi^{n-1} = (|x|/t^\beta)^{n-1}$ und integrieren Sie die resultierende Gleichung.)

Aufgabe 3. Sei (u,p) eine klassische Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ &u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand sei. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $\lambda > 0$, so daß

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad t > 0.$$

---

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.