ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 6

(BESPRECHUNG EVTL. FRAGEN AM MITTWOCH, 16. MAI, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Seien $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ und $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ eine schwache Lösung von

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Die Funktion f sei lipschitzstetig in $\mathbb{R}$ mit Lipschitzkonstante $L > 0$, $f(0) = 0$, und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} e^{\lambda t}, \quad t > 0.$$

Aufgabe 2. Seien $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ und $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ eine schwache Lösung von

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Die Funktion f sei stetig, monoton fallend und es gebe ein $M_0 > 0$ mit $f(M_0) \leq 0$ und $f(-M_0) \geq 0$. Ferner sei $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\{M_0, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}, \quad t > 0.$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Navier-Stokes-Gleichung im zwei-dimensionalen Streifen $\Omega = \mathbb{R} \times (0,h)$

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= \Delta u && \text{in } \Omega \times (0,T]\,, \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,T]\,, \\ u &= 0 && \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]\,, \end{aligned}$$

Dabei ist $u = (u_1, u_2)$ das Strömungsfeld und p der Druck.

(i) Zeigen Sie, dass es Lösungen der Form $u(x,t) = \exp(\alpha t)\sin(k\pi x_2/h)\Phi$ mit $\Phi \in \mathbb{R}^2$ gibt.
(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen (u,p), für die u weder von t noch von x_1 abhängt.
(iii) Charakterisieren Sie alle Lösungen (u,p), für die u nicht von x_1 abhängt, durch eine einfache partielle Differentialgleichung.

---

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.