ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 7

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 16. MAI, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und sei $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq k \leq u_0 \leq K$ in Ω. Sei u eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} &u_t = \Delta u + u^+(\alpha - u) && \text{in } \Omega,\ t > 0,\\ &u(0,x) = u_0(x), && \text{in } \Omega\\ &u = 0 && \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0, \end{aligned}$$

wobei $u^+ = \max\{0, u\}$ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie: Es existieren $m \geq 0$ und $M > 0$ mit

$$m \leq u \leq M \qquad \text{in } \Omega,\ t > 0.$$

Aufgabe 2. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\text{meas}(\Omega) > 0$ und $f \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Aufgabe 3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $\varepsilon > 0$, und sei u eine klassische Lösung der Allen-Cahn-Gleichung

$$\begin{aligned} &u_t = \varepsilon\Delta u - \frac{1}{\varepsilon}(u^2 - 1)u && \text{in } \Omega,\ t > 0,\\ &\nabla u \cdot \nu = 0 && \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0,\\ &u(0,x) = u_0(x) && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Definiere das Funktional

$$E[u](t) = \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (u^2 - 1)^2 dx.$$

Zeigen Sie:
(i) Für alle $t > 0$ gilt $dE/dt \leq 0$.
(ii) $E : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist schwach unterhalbstetig, d.h. $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $H^1(\Omega)$ impliziert $E[u] \leq \liminf_{k\to\infty} E[u_k]$.

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.