ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 8

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 23. MAI, 16:00-17:30 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Seien $z \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$ mit $z \geq 0$ und $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ mit $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$). Zeigen Sie für $0 \leq \tau \leq T$:

$$\int_0^\tau \langle u_t, (u-z)^+\rangle_{H^{-1}} dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \big((u-z)^+(\tau)^2 - (u-z)^+(0)^2\big)dx + \int_0^\tau \int_\Omega z_t (u-z)^+ dx dt.$$

Aufgabe 2. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion mit der Wachstumsbedingung

$$|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1} + h(x) \quad \text{für } x \in \Omega,\ x \in \mathbb{R},$$

wobei $C > 0$, $p > 1$ und $h \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$. Definiere den sogenannten *Nemyckii-Operator* $F(u)(x) = f(x,u(x))$ für $x \in \Omega$, $u \in X = L^p(\Omega)$. Zeigen Sie:

(i) $F : X \to X'$ ist wohldefiniert und

$$\|F(u)\|_{X'} \leq C(\|h\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}).$$

(ii) Wenn $f(x,u)u \geq \alpha|u|^p$ für $x \in \Omega$ und $u \in \mathbb{R}$, dann ist F koerziv.

Aufgabe 3. Seien V ein reflexiver Banachraum und $A : V \to V'$ ein Operator. Dann gilt:

(i) Wenn A hemistetig und monoton ist, dann ist A vom Typ M.
(ii) Wenn A beschränkt und vom Typ M ist, dann ist A demistetig.
(iii) Wenn A demistetig ist, dann auch hemistetig.

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.