ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 9

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 30. MAI, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1.

(i) Seien X und Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer stetiger Operator. Zeigen Sie, dass A schwach folgenstetig ist, d.h., es gilt für $k \to \infty$
$$x_k \rightharpoonup x \quad \text{in } X \quad \Rightarrow \quad A(x_k) \rightharpoonup A(x) \quad \text{in } Y.$$

(ii) Seien V ein reflexiver Banachraum sowie $A : V \to V'$ und $B : V \to V'$ zwei Operatoren. Zeigen Sie: Ist A vom Typ M und B linear und kompakt (insbesondere stetig), so ist $A + B$ vom Typ M.

Aufgabe 2. Seien V ein reflexiver Banachraum mit Basis (v_k), $f \in V'$ und $A : V \to V'$ ein beschränkter Operator vom Typ M, der stark monoton ist, d.h.
$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{V'} \geq \gamma \|u - v\|_V^2 \qquad u, v \in V$$
für ein $\gamma > 0$. Weiter sei $u_m \in V_m$ eine Lösung von
$$\langle A(u_m), v_k\rangle_{V'} = \langle f, v_k\rangle_{V'}, \quad k = 1, \dots, m,$$
wobei $V_m = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, und es gebe eine Konstante $C > 0$, so daß $\|u_m\|_V \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Folge (u_m) konvergiert in V gegen $u \in V$ und u ist die eindeutige Lösung von $A(u) = f$ in V'.

Aufgabe 3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Definiere den Raum
$$X = \{v \in H_0^1(\Omega)^3 : \operatorname{div} v = 0\},$$
versehen mit der Norm
$$\|v\|_X^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$
Zeigen Sie, daß X mit dieser Norm ein reflexiver, separabler Banachraum ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven separablen Banachraums selbst ein reflexiver separabler Banachraum ist.

---

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.