ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 10

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 6. JUNI, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $0 < s < 1$ und $1 < p < \infty$. Seien ferner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine hölderstetige Funktion mit $f(0) = 0$, d.h. $|f(x) - f(y)| \leq c_H |x - y|^\theta$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $c_H > 0$ und $\theta \in (0, 1)$, und $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\|f(u)\|_{W^{\theta s, p/\theta}(\Omega)} \leq c_H \|u\|^\theta_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Aufgabe 2. Seien $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel komplexwertiger Banachräume, $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine stetige, schiefsymmetrische und koerzive Sesquilinearform, $f \in L^2(0, T; H)$ und $u_0 \in V$. Zeigen Sie, daß das abstrakte Schrödinger-Problem

$$\langle u_t(t), v \rangle_{V'} + \mathrm{i} a(u(t), v) = (f(\cdot, t), v)_H, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0$$

höchstens eine Lösung $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ besitzt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die kubische Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i} u_t + \Delta u - |u|^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \quad u(\cdot, 0) = u_0,$$

höchstens eine beschränkte glatte Lösung besitzt.

---

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.