ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 11

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 13. JUNI, 17:45-19:15 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Sei u eine glatte Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u + |u|^\alpha u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

mit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $xu_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $4/n \leq \alpha < 4/(n-2)$ ($4/n \leq \alpha < \infty$, wenn $n \leq 2$). Wir nehmen an, daß $xu(x,t)$ und $\|xu(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ glatte Funktionen sind. Die Energie von u ist definiert durch

$$E(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 - \frac{1}{\alpha+2}|u(x,t)|^{\alpha+2}\Big) dx.$$

Wir wissen bereits, daß $E(u(t)) = E(u_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(i) Zeigen Sie:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u(x,t)|^2 dx = 4n\alpha E(u_0) - 2(n\alpha - 4)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx.$$

(ii) Sei $E(u_0) < 0$. Folgern Sie, daß die obige Schrödinger-Gleichung *keine glatte* zeitlich globale Lösung besitzen kann.

Aufgabe 2. Betrachte die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$|u_x| - 1 = 0 \quad \text{in } (-1,1), \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Zeigen Sie, daß $u(x) = \frac{1}{2} - |\frac{1}{2} - |x||$ für $x \in [-1,1]$ *keine* Viskositätslösung ist.

Aufgabe 3. Wir sagen, daß u eine *Viskositätssublösung (Viskositätssuperlösung)* von

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ist, wenn für alle $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt: Besitzt $u - v$ ein lokales Maximum (Minimum) an $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$H(x_0, u(x_0), \nabla v(x_0)) \leq 0 \quad (\geq 0).$$

u ist eine *Viskositätslösung*, falls u sowohl Viskositätssub- also auch Viskositätssuperlösung ist.

Zeigen Sie:

(i) Sind u, w Viskositätssublösungen von $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$, dann ist auch $\max\{u, w\}$ eine Viskositätssublösung.

(ii) Sind u, w Viskositätssuperlösungen von $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$, dann ist auch $\min\{u, w\}$ eine Viskositätssuperlösung.

`sabine.hittmeir@tuwien.ac.at`.