ÜBUNGEN NICHTLINEARE PDES IM SS 2012
BLATT 12

(BESPRECHUNG AM MITTWOCH, 20. JUNI, 16:00 IM SE 101A)

SABINE HITTMEIR

Aufgabe 1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $u_0 > 0$. Betrachten Sie das Problem

$$u_t = \Delta \ln u \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 1 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Unter der Annahme, daß dieses Problem eine glatte und in Ω positive Lösung besitzt, zeigen Sie die Abschätzungen $0 \le u \le \max\{1, \sup_\Omega u_0\}$ und

$$\|\nabla \sqrt{u}\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \le \frac{1}{\sqrt{8}} \|u_0 - 1\|_{L^2(\Omega)},$$
$$\|\nabla \ln u\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \le \|u_0(\ln u_0 - 1) + 1\|_{L^1(\Omega)}.$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie die parabolische Gleichung vierter Ordnung

$$u_t = -u_{xxxx}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2),\ t > 0, \quad u(x,0) = 3.1 - 4\cos(x) + 2\cos(2x) \ge 0.1,$$
$$u(-\pi/2, t) = u(\pi/2, t) = 3.1 - 2e^{-16t},\ t > 0,$$
$$u_x(-\pi/2, t) = -4e^{-t}, \quad u_x(\pi/2, t) = 4e^{-t},\ t > 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass $u(x,t) = 3.1 - 4e^{-t}\cos(x) + 2e^{-16t}\cos(2x)$ die eindeutig bestimmte Lösung dieses Problems ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Maximumprinzip für diese Gleichung nicht gilt, d.h., es existiert $(\bar{x}, \bar{t})$, so dass $u(\bar{x}, \bar{t}) < 0$, obwohl $u(x,t)$ auf dem parabolischen Rand $t = 0$ und $x = \pm\pi/2$ positiv ist.

sabine.hittmeir@tuwien.ac.at.