ÜBUNGEN ZU "NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" BLATT 10 (14.6.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Definiere den Raum

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\},$$

versehen mit der Norm

$$\|v\|_V^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}}^2 = \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Zeige, dass V mit dieser Norm ein reflexiver, separabler Banachraum ist.

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $f \in (L^2(\Omega))^3$. Die stationäre Stokes-Gleichung lautet

$$\begin{cases} \nabla p - \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(1) Bestimme die schwache Formulierung und zeige die Existenz einer eindeutigen Lösung $u \in V$ (V wie in Aufgabe 1).
(2) Wie lässt sich p aus der schwachen Lösung $u \in V$ bestimmen?

Aufgabe 3. Betrachte die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ &u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand sei. Es sei $V := \{v \in H_0^1(\Omega)^2 : \operatorname{div} v = 0\}$ und $H := \overline{V} \subset L^2(\Omega)^2$ der Abschluss bzgl. der L^2-Norm, $f \in L^2(0,T,V')$ und $u_0 \in H$. $u \in L^2(0,T,V)$ mit $u' \in L^2(0,T,V')$ ist eine schwache Lösung, wenn

$$\langle u'(t), v\rangle_{V'} + \int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot v + \nabla u : \nabla v dx = \langle f(t), v\rangle_{V'} \quad \text{f.ü. in } [0,T]$$

und $u(0) = u_0$. Zeige, dass höchstens eine schwache Lösung existiert.
Hinweis: Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung.

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

Aufgabe 4. Sei (u, p) eine klassische Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ &u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand sei. Zeige: Es existiert eine Konstante $\lambda > 0$, so dass

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\lambda t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad t > 0.$$

Aufgabe 5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Betrachte den Operator $A(u) = (u \cdot \nabla)u - \Delta u$ und das Evolutionstripel (V, H, V') aus Aufgabe 3. Zeige für $X := L^2(0, T, V)$, dass $A : X \cap L^\infty(0, T, H) \to X'$ beschränkt ist.

Hinweis: Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung.