ÜBUNGEN ZU "NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" BLATT 11 (21.6.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Seien $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel komplexwertiger Banachräume, $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine stetige, schiefsymmetrische und koerzive Sesquilinearform, $f \in L^2(0,T;H)$ und $u_0 \in V$. Zeige, dass das abstrakte Schrödinger-Problem

$$\langle u_t(t), v\rangle_{V'} + \mathrm{i}a(u(t), v) = (f(\cdot,t), v)_H, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0$$

höchstens eine Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ besitzt.

Aufgabe 2. Sei u eine glatte Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u + |u|^\alpha u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \quad u(\cdot,0) = u_0$$

mit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $xu_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $4/n \le \alpha < 4/(n-2)$ ($4/n \le \alpha < \infty$, wenn $n \le 2$). Wir nehmen an, dass $xu(x,t)$ und $\|xu(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ glatte Funktionen sind. Die Energie von u ist definiert durch

$$E(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 - \frac{1}{\alpha+2}|u(x,t)|^{\alpha+2}\Big)dx.$$

(i) Zeige:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u(x,t)|^2dx = 8\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2dx - \frac{4n\alpha}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\alpha+2}dx.$$

(ii) Sei $E(u_0) < 0$. Folgere aus (i) und der in der VO gezeigten Energieerhaltung $E(u(t)) \equiv E(u_0)$, dass die obige Schrödinger-Gleichung keine glatte zeitlich globale Lösung besitzen kann.

Aufgabe 3. Betrachte die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$u(x) - |u'(x)| = 0 \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 1.$$

Zeige, dass die Funktion $u(x) = \max\{e^{-x}, e^{x-1}\}$ eine Viskositätslösung ist.

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

Aufgabe 4. Wir sagen, dass u eine *Viskositätssublösung (Viskositätssuperlösung)* von

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ist, wenn für alle $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt: Besitzt $u - v$ ein lokales Maximum (Minimum) an $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$H(x_0, u(x_0), \nabla v(x_0)) \leq 0 \quad (\geq 0).$$

Zeige:

(i) Sind u, w Viskositätssub(super)lösungen von $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$, dann ist auch $\max\{u, w\}$ ($\min\{u, w\}$) eine Viskositätssub(super)lösung.

(ii) Ist u eine Viskositätssub(super)lösungen von $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$, dann ist $\hat{u} := -u$ eine Viskositätssuper(sub)lösung von $\hat{H}(x, \hat{u}(x), \nabla \hat{u}(x)) = 0$ wobei $\hat{H}(x, u, p) = -H(x, -u, -p)$.

(iii) Sei $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$ stetig und nicht fallend. Zeige: u ist eine Viskositätssuperlösung von $u' = 0$ und eine Viskositätssublösung von $-u' = 0$ auf $(0, 1)$.