ÜBUNGEN ZU “NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN” BLATT 3 (12.4.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig und $f \in L^2(\Omega)$. Zeige mithilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass für eine hinreichend kleine Lipschitzkonstante L_b die semilineare Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + b(\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 2. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$, $0 < \beta < 1$ und $f \in L^2(\Omega)$. Zeige (ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.5, bzw. Rechnung auf Seite 22), dass das Randwertproblem

$$-\Delta u = |\nabla u|^\beta + f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

eine schwache Lösung $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ besitzt.
Hinweis: Wähle $K = \{u \in H^1(\Omega) : \|u\|_{H^2(\Omega)} \le M\}$.

Aufgabe 3. Betrachte auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ die quasilineare Gleichung

$$-\mathrm{div}(a(u)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $a \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $a(u) \ge \alpha > 0$ für $u \in \mathbb{R}$ und $f \in L^2(\Omega)$. Definiere den Fixpunktoperator $S : L^2(\Omega) \times [0,1] \to L^2(\Omega)$, $S(v,\sigma) = u$, wobei u die Lösung von

$$-\mathrm{div}(a(v)\nabla u) = \sigma f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

ist. Zeige, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Leray-Schauder erfüllt sind und schließe die Existenz einer schwachen Lösung der obigen nichtlinearen Gleichung.

Aufgabe 4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und sternförmig bezüglich null, d.h. $\{\lambda x \,|\, 0 \le \lambda \le 1\} \subset \overline{\Omega}$ für alle $x \in \overline{\Omega}$. Sei weiters $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung von

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\frac{n+2}{n-2} < p < \infty$. Das Ziel ist zu beweisen, dass $u \equiv 0$ in Ω.

---

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

1. Schritt: Zeige, dass u folgende Gleichung erfüllt:
$$\frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x\cdot\nu) ds = \frac{n}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx,$$
wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf Ω ist. Multipliziere dafür die Differentialgleichung mit $x \cdot \nabla u$ und verwende partielle Integration. Verwende außerdem (ohne Beweis), dass aus $u = 0$ auf $\partial\Omega$ folgt, dass $\nabla u = \pm|\nabla u|\nu$.
2. Schritt: Multipliziere die Differentialgleichung mit u und integriere partiell, um eine weitere Gleichung zu erhalten und kombiniere diese mit der Gleichung aus Schritt 1. Verwende außerdem (ohne Beweis), dass für ein sternförmiges Gebiet gilt, dass $x \cdot \nu \geq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$.