ÜBUNGEN ZU “NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN” BLATT 4 (19.4.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$ und $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzstetige Funktion, woraus folgt dass

$$\exists C_b > 0 : \quad |b(p)| \leq C_b(1 + |p|) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige: Für $\mu > 0$ hinreichend groß hat das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Betrachte die nichtlineare Poissongleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|f'| \leq C$. Weiters seien $\overline{u}, \underline{u} \in H^1(\Omega)$ schwache Lösungen der Ungleichungen

$$-\Delta\underline{u} \leq f(\underline{u}), \quad -\Delta\overline{u} \geq f(\overline{u})$$

mit $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ auf $\partial\Omega$ und $\underline{u} \leq \overline{u}$ f.ü. in Ω.

(i) Zeige, dass für geeignetes $\lambda > 0$ eine Folge (u_k) von schwachen Lösungen der RWPs

$$\begin{aligned} -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} &= f(u_k) + \lambda u_k \quad \text{in } \Omega \\ u_{k+1} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

definiert werden kann, mit

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_k \leq ... \leq \overline{u} \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

(ii) Zeige die Existenz einer schwachen Lösung der nichtlinearen Poissongleichung. Zeige dafür, dass $u := \lim u_k$ in $L^2(\Omega)$ existiert, eine Teilfolge schwach in $H_0^1(\Omega)$ konvergiert und die schwache Formulierung erfüllt ist.

---

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

Aufgabe 3. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine monotone Funktion, $b : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion mit

$$(b(x,u) - b(x,v))(u-v) \geq \beta(u-v)^2 \quad \text{für } x \in \Omega,\ u,v \in \mathbb{R},$$

$\beta > 0$ und $f \in L^2(\Omega)$. Ferner seien $u, v \in H^1(\Omega)$ schwache Lösungen der Ungleichungen

$$-\operatorname{div} a(\nabla u) + b(x,u) \leq f, \quad -\operatorname{div} a(\nabla v) + b(x,v) \geq f \quad \text{in } \Omega$$

und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$. Zeige, dass $u \leq v$ in Ω.

Aufgabe 4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $A(x)$ eine beschränkte elliptische Matrix, $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq c_0 > 0$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ONB von $H^1(\Omega)$ und $u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k w_k$ die Lösung von

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla u_m^T A \nabla w_k + c u_m w_k\right) dx = \int\limits_\Omega f w_k dx \quad \text{für } k = 1, ...m.$$

Zeige, dass die Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ schwach in $H^1(\Omega)$ gegen die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ (A\nabla u)\cdot\nu &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

konvergiert.