ÜBUNGEN ZU “NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN” BLATT 5 (26.4.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Seien $f \in C^0(\mathbb{R})$ eine (ggf. nicht streng) monoton wachsende Funktion, sodass $f(w) \in L^2(\Omega)$ für alle $w \in L^2(\Omega)$, und $(u_k) \subset L^2(\Omega)$ eine Folge, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Es gelte:

$$f(u_k) \rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad u_k \to u \quad \text{in } L^2(\Omega) \text{ für } k \to \infty.$$

Zeige, dass $v = f(u)$ mit Hilfe der Methode von Browder und Minty.

Aufgabe 2. Zeige, dass es höchstens eine schwache Lösung der Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

gibt, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$.

Anleitung: Zeige zuerst für alle p, $q \in \mathbb{R}^n$

$$\Big(\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big) \cdot (p-q) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1+|p|^2} + \sqrt{1+|q|^2})\Big|\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big|^2.$$

Sind dann u, $v \in H_0^1(\Omega)$ zwei schwache Lösungen der Minimalflächengleichung, zeige $u = v$ in Ω.

Aufgabe 3. Betrachte das Drift-Diffusionssystem im *thermischen Gleichgewicht* (d.h. Zustand mit verschwindendem Stromfluss)

$$\nabla u - u\nabla\phi = 0, \ \Delta\phi = u - f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = f, \ \phi = \ln f \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$ in Ω.

(i) Zeige: (u, ϕ) mit $u > 0$ ist genau dann eine klassische Lösung des obigen Randwertproblems, wenn (u, ϕ) eine klassische Lösung des Problems

$$\Delta\phi = e^\phi - f(x), \quad u = e^\phi \quad \text{in } \Omega$$

mit den obigen Randdaten ist.

(ii) Setze $f_* = \inf_\Omega f$ und $f^* = \sup_\Omega f$. Zeige, dass für eine schwache Lösung $\phi \in H^1(\Omega)$ der obigen Gleichung gilt:

$$\ln f_* \leq \phi \leq \ln f^* \quad \text{in } \Omega.$$

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

Aufgabe 4. Sei $u \in H^1(\Omega)$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung von

$$\Delta u = u^4 \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \leq 3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ seien. Zeige mit Hilfe eines Bootstrapping-Arguments, dass $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.