ÜBUNGEN ZU "NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" BLATT 6 (3.5.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sei $X := C([0,T];L^2(\Omega))$. Betrachte die Abbildung $A : X \to X, v \mapsto u$, die einem $v \in X$ die schwache Lösung u von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(v) & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ u = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

zuordnet. Die Funktion f sei Lipschitz-stetig und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Zeige, dass A^k für $k = k(T) \in \mathbb{N}$ hinreichend groß eine Kontraktion ist.

Aufgabe 2. Seien $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ und $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) & \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Die Funktion f sei lipschitzstetig in $\mathbb{R}$ mit Lipschitzkonstante $L > 0$, $f(0) = 0$, und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Zeige:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^2(\Omega)} e^{(L - C_p^{-2})t}, \quad t > 0,$$

mit Poincaré-Konstante C_p.

Aufgabe 3. Seien $z \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ mit $z \ge 0$ und $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ mit $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$). Zeige für $0 \le \tau \le T$:

$$\int_0^\tau \langle u_t, (u-z)^+ \rangle_{H^{-1}} dt = \frac{1}{2} \int_\Omega \big((u-z)^+(\tau)^2 - (u-z)^+(0)^2 \big) dx + \int_0^\tau \int_\Omega z_t (u-z)^+ dx dt.$$

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

Aufgabe 4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 \le u_0 \le K$ in Ω. Sei u eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^+(\alpha - u) & \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

wobei $u^+ = \max\{0, u\}$ und $\alpha > 0$. Zeige: Es existieren $m \ge 0$ und $M > 0$ mit

$$m \le u \le M \quad \text{in } \Omega,\ t > 0.$$