ÜBUNGEN ZU "NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" BLATT 7 (17.5.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wobei $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $u_0 \geq 0$ aber $u_0 \not\equiv 0$ und $1 < p < \frac{n+2}{n}$. Zeige, dass keine nicht-negative, integrierbare, glatte Lösung u für alle Zeiten $T > 0$ existieren kann.

Anleitung: Gehe analog zum Beweis von Proposition 3.12 vor, definiere hier jedoch $z(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\Phi(x,s)dx$, wobei

$$\Phi(x,s) = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4s}}$$

die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ausgewertet an einer zu bestimmenden Zeit $s > 0$ ist.

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $\epsilon > 0$, und sei u eine klassische Lösung der *Allen-Cahn-Gleichung*

$$\begin{cases} u_t - \epsilon\Delta u = -\frac{1}{\epsilon}(u^2 - 1)u & \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Definiere das Funktional

$$E(u(t)) = \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_\Omega (u(t)^2 - 1)^2 dx.$$

Zeige:

(i) Für alle $t > 0$ gilt $dE/dt \leq 0$.
(ii) $E : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist schwach unterhalbstetig, d.h. $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $H^1(\Omega)$ impliziert $E(u) \leq \liminf_{k\to\infty} E(u_k)$.

---

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

Aufgabe 3. Wir betrachten weiterhin die *Allen-Cahn-Gleichung* aus Aufgabe 2 mit $n \leq 3$. Zeige:

(i) Sei u eine schwache Lösung der Allen-Cahn-Gleichung. Falls $-1 \leq u_0 \leq 1$ in Ω, so folgt $-1 \leq u(t) \leq 1$ in Ω für alle $t > 0$.

(ii) Seien $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $T > 0$ und $-1 \leq u_0 \leq 1$ in Ω. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ von (1).

Aufgabe 4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 < u_0 \leq 1$. Sei u eine reguläre, positive Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta \ln u & \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ u = 1 & \text{auf } \partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

(i) Zeige die Abschätzungen $u \leq 1$.

(ii) Definiere das Funktional $E_1(u(t)) = \int_\Omega (u(t) - 1)^2 dx$. Zeige, dass eine von u unabhängige Konstante $C > 0$ existiert, sodass $\frac{d}{dt} E_1(u(t)) \leq -C E_1(u(t))$ und schließe daraus die L^2-Konvergenz von u gegen die stationäre Lösung $u_\infty \equiv 1$ für $t \to \infty$.

(iii) Definiere $E_2(u(t)) = \int_\Omega (u(t)(\ln u(t) - 1) + 1)\, dx$ und zeige, dass $\frac{d}{dt} E_2(u(t)) \leq 0$.