ÜBUNGEN ZU "NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" BLATT 8 (24.5.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Seien V ein reflexiver Banachraum und $A : V \to V'$ ein Operator. Zeige:

(i) Wenn A hemistetig und monoton ist, dann ist A vom Typ M.
(ii) Wenn A beschränkt und vom Typ M ist, dann ist A demistetig.
(iii) Wenn A demistetig ist, dann ist A auch hemistetig.

Aufgabe 2. Seien V ein reflexiver Banachraum mit Basis (v_k), $f \in V'$ und $A : V \to V'$ ein beschränkter Operator vom Typ M und streng monoton, d.h. es existiert ein $\gamma > 0$ sodass

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V'} \geq \gamma \|u - v\|_V^2 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Weiters sei $u_m \in V_m$ eine Lösung von

$$\langle A(u_m), v_k\rangle_{V'} = \langle f, v_k\rangle_{V'}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

wobei $V_m = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, und es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass $\|u_m\|_V \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Zeige: Die Folge (u_m) konvergiert in V gegen $u \in V$ und u ist die eindeutige Lösung von $A(u) = f$ in V'.

Aufgabe 3. Seien V ein reflexiver Banachraum sowie $A : V \to V'$ und $B : V \to V'$ zwei Operatoren. Zeige: Ist A vom Typ M und B linear und kompakt, so ist $A + B$ vom Typ M.

Aufgabe 4. Sei H ein separabler Hilbertraum mit ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $A : H \to H' \simeq H$, $A(u) = -u$. Weiters sei P die Projektion von H auf $K := \{v \in H : \|v\|_H \leq 1\}$. Zeige:

(i) P ist eine monotone, lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante ≤ 1.
Hinweis: Zeige zunächst $(Pu - u, Pu - v)_H \leq 0$ für alle $v \in K$.
(ii) Die Abbildung $A + P$ ist nicht vom Typ M.
Hinweis: Betrachte die Folge $u_n = e_1 + e_n$.

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.