ÜBUNGEN ZU "NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" BLATT 9 (7.6.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Betrachte die Poröse-Medien-Gleichung

$$u_t - \Delta(u^m) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

mit einer Konstanten $m > 1$ und sei $u \geq 0$ eine glatte Lösung mit $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$ und $\lim_{|x|\to\infty} \nabla u(x,t) = 0$.

(i) Sei $\alpha + 1 = \alpha m + 2\beta$. Leite für die Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $u(x,t) = t^{-\alpha} v(t^{-\beta}|x|)$, eine gewöhnliche Differentialgleichung her.

(ii) Berechne eine radialsymmetrische Lösung der Poröse-Medien-Gleichung für den Fall $\alpha = n\beta$.
Hinweis: Multipliziere die gewöhnliche Differentialgleichung zuerst mit $r^{n-1} = |x|^{n-1}$ und integriere die resultierende Gleichung.

Aufgabe 2. Betrachte weiterhin die in Aufgabe 1 berechnete radialsymmetrische Lösung $u(x,t)$ der Poröse-Medien-Gleichung.

(i) Skizziere die Funktion $u(\cdot,t)$ für verschiedene Zeitpunkte und bestimme die Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

(ii) Zeige, dass $u(\cdot,t) \to M\delta$ für $t \to 0$ im distributionellen Sinn, wobei δ die Delta-Distribution mit Pol in 0 und M eine positive Konstante ist.

Aufgabe 3. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sei $0 \leq u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ und u_n für $n \in \mathbb{N}$ die Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u_n = \Delta(u_n^m) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u_n = \frac{1}{n} & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n(0) = u_0 + \frac{1}{n} & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Zeige, dass $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ in $\Omega \times (0,T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Verwende (ohne Beweis), dass aufgrund der Regularität der Anfangsdaten sogar $\|\nabla u_n\|_{L^\infty} \leq C_n$ gilt.

---

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

Aufgabe 4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $0 < s < 1$ und $1 < p < \infty$. Seien ferner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine hölderstetige Funktion mit $f(0) = 0$, d.h. $|f(x) - f(y)| \leq c_H|x - y|^\theta$ für alle x, $y \in \mathbb{R}$, wobei $c_H > 0$ und $\theta \in (0, 1)$, und $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Zeige:

$$\|f(u)\|_{W^{\theta s,p/\theta}(\Omega)} \leq c_H\|u\|^\theta_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Zeige außerdem, dass $W^{s',p}(\Omega)$ stetig in $W^{s,p}(\Omega)$ eingebettet ist für $0 < s \leq s' < 1$.