ÜBUNGEN ZU *NICHTLINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN* BLATT 1 (12.03.2020)

ALEXANDRA HOLZINGER

Aufgabe 1. Betrachten Sie die *Poröse-Medien Gleichung*

$$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0 \quad \text{auf } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$$

für eine Konstante $\gamma > 1$ und eine nichtnegative Funktion $u \geq 0$. Finden Sie eine Lösung dieser Gleichung (zumindest auf einem endlichen Zeitinterval) mit Hilfe des Separationsansatzes $u(t,x) = v(t)w(x)$.

Hinweis: Machen Sie für w den Ansatz $w(x) = |x|^\alpha$ für ein $\alpha > 0$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u = R_0 - u^2 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = \sqrt{R_0} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $R_0 > 0$ genau eine (klassische) positive Lösung, nämlich $u = \sqrt{R_0}$, besitzt:

(i) Mit Hilfe des schwachen Maximumsprinzips für elliptische Differentialoperatoren (siehe PDE Skript von Prof. Jüngel, Kapitel 5.5.).

(ii) Mit Hilfe einer geschickten Wahl der Testfunktion in der schwachen Formulierung.

Aufgabe 3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Zeigen Sie, dass es für $f \in L^2(\Omega)$ höchstens eine schwache Lösung der Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

gibt.

Anleitung: Zeigen Sie zuerst für alle p, $q \in \mathbb{R}^d$

$$\Big(\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big) \cdot (p-q) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1+|p|^2} + \sqrt{1+|q|^2})\Big|\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big|^2.$$

Sind dann u, $v \in H_0^1(\Omega)$ zwei schwache Lösungen der Minimalflächengleichung, zeigen Sie $u = v$ in Ω.

`alexandra.holzinger@tuwien.ac.at`.

Aufgabe 4. Lösen Sie das folgende Cauchy-Problem mit der Methode der Charakteristiken für quasilineare partielle Differentialgleichungen (siehe PDE Skript von Prof. Jüngel, Kapitel 2.1):

$$\begin{aligned} (u+x_2)u_{x_1} + u_{x_2} &= u \qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x_1,0) &= x_1. \end{aligned}$$