Übungen zu Fana1 SS11, 2. Übung

1. Seien (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$, metrische Räume und setze für $f, g \in X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$

$$d(f,g) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\frac{1}{n}\frac{d_n(f_n,g_n)}{1+d_n(f_n,g_n)}\Big).$$

   Man zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist, wobei die von d induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ mit der Produkttopologie $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_{d_n}$ übereinstimmt, wobei $\mathcal{T}_{d_n}$ die von d_n auf X_n induzierte Topologie ist.

2. Bestimme Sie alle möglichen kreisförmigen Teilmengen von $\mathbb{C}$ und begründen Sie warum das alle sind!

   Geben Sie weiters an, wie man sinnvollerweise definiert, dass eine Teilmenge A eines Vektorraumes über $\mathbb{R}$ kreisförmig ist. Bestimmen sie damit auch alle kreisförmigen Teilmengen von $\mathbb{R}$!

3. Man finde ein Beispiel einer kreisförmigen Menge, deren Inneres nicht kreisförmig ist.

   Hinweis: Man betrachte eine Art von "Dreieck" in $X = \mathbb{C}^2$.

4. Zeigen Sie, dass in einem Skalarproduktraum $(H, (.,.))$ für eine Folge (x_n) in H genau dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (bzgl. $\|.\|$), wenn $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ und $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$ für alle $y \in H$.

   Zudem zeige man, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (bzgl. $\|.\|$) auch äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ und $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$ für $y \in D$ ist. Dabei ist $D \subseteq H$ irgend eine dichte Menge.

5. Mit der Notation aus dem Beispiel 6 der ersten Übung seien die X_j sogar Räume mit innerem Produkt $(.,.)_j$, wobei die Normen $\|.\|_j$ von den Produkten $(.,.)_j$ erzeugt werden.

   Zeigen Sie, dass X für $p = 2$ dann auch mit einem inneren Produkt versehen werden kann, sodass die von diesem Produkt erzeugte Norm mit der aus Beispiel 6 der ersten Übung übereinstimmt.

   Zeigen Sie weiters, dass sich jedes $(X_j, (.,.)_j)$ isometrisch (Produkterhaltend) in X einbetten lässt, wobei der entsprechende Teilraum von X abgeschlossen ist.

   Schließlich zeigen Sie, dass X genau dann ein Hilbert Raum ist, wenn alle X_j es sind.

6. Sei $C^\infty(-2,2)$ versehen mit der gröbsten Topologie, sodass alle Abbildungen $C^\infty(-2,2) \to C(-2+\frac{1}{k}, 2-\frac{1}{k})$, $f \mapsto f^{(n)}|_{(-2+\frac{1}{k},2-\frac{1}{k})}$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \in \mathbb{N}$ stetig sind. Dabei ist $C(-2+\frac{1}{k}, 2-\frac{1}{k})$ mit der Topologie versehen, die von $\|.\|_\infty$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass damit $C^\infty(-2,2)$ zu einem topologischen Vektorraum wird. Geben Sie eine Null-Umgebungsbasis an, und zeigen Sie, dass diese Topologie mit der aus Beispiel 2.2.10 übereinstimmt, wenn man die K_i entsprechend wählt!

7. Betrachte den Hilbert Raum $\ell^2(\mathbb{N})$, und die Elemente

$$b := (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad e_k := (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}},$$

wobei

$$\delta_{kn} := \begin{cases} 1 & , k = n \\ 0 & , k \neq n \end{cases}$$

Zeige, dass die Menge $\{b, e_1, e_2, \ldots\}$ linear unabhängig in ℓ^2 ist. Zeige, dass jedes lineare Funktional $\phi : \ell^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$\phi(b) = 1, \quad \phi(e_n) = 0, \; n \in \mathbb{N},$$

unstetig ist. Gibt es ein solches lineares Funktional?

8. Sei X ein normierter Raum. Zeige: Ist $\dim X = \infty$, dann existiert ein unstetiges lineares Funktional auf X. Gibt es ein unstetiges lineares Funktional, wenn $\dim X < \infty$ ist?

   Hinweis: Man baue mit Hilfe einer (algebraischen Basis) eine unbeschränkte lineare Abbildung nach $\mathbb{C}$.