Übungen zu Fana1 SS11, 4. Übung

1. Sei X ein topologischer Raum und $E \subseteq X$. Zeige: E ist nirgends dicht (d.h. $\overline{E}$ hat leeres Inneres) genau dann, wenn gilt: Jede nichtleere offene Menge enthält eine nichtleere offene Menge, die mit E leeren Schnitt hat.

2. Der Satz von Baire wird oft dazu benützt, um die Existenz pathologischer Objekte zu beweisen.

   Betrachte die Menge $\mathfrak{C}$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm. Sei $X_n \subseteq \mathfrak{C}$ die Menge jener Funktionen f, für die es ein $t \in [0,1]$ gibt mit $|f(s) - f(t)| \leq n|s - t|, s \in [0,1]$. Zeige, dass X_n in $\mathfrak{C}$ nirgends dicht ist, und folgere, dass es eine stetige Funktion gibt, die nirgends differenzierbar ist.

   Hinweis: Verwende die vorherige Aufgabe und bemerke, dass eine stetige Funktion auf $[0,1]$ gleichmäßig durch Polygonzüge mit sehr steilen Anstiegen approximiert werden kann.

3. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Dann ist die Mächtigkeit einer algebraischen Basis von X als $\mathbb{C}$-Vektorraum entweder endlich oder überabzählbar.

   Hinweis: Zeige, dass ein linearer Teilraum $Y \subsetneq X$ keinen inneren Punkt hat, und verwende den Satz von Baire.

4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $B \subseteq X$ heißt beschränkt (im Sinne von topologischer Vektorraum), falls es zu jeder Nullumgebung U ein positive Zahl λ_U gibt, sodass $B \subseteq \lambda_U U$.

   (a) B ist beschränkt genau dann, wenn es zu jeder Nullumgebung U eine positive Zahl μ_U gibt, sodass $B \subseteq \lambda U$, für alle $\lambda > \mu_U$.

   (b) Ist B beschränkt, so auch $\overline{B}$.

   (c) Jede kompakte Menge ist beschränkt.

   (d) Ist $\mathcal{T}$ von einer Norm induziert, so gibt es eine Null-Umgebungsbasis bestehend aus beschränkten Mengen.

5. Mit der Notation aus dem ersten Beispiel der zweiten Übung sei zusätzlich angenommen, dass die $(X_n, \mathcal{T}_{d_n})$ alle topologische Vektorräume mit $X_n \neq \{0\}$ sind, und dass alle Metriken d_n von Normen $\|.\|_n$ auf X_n induziert werden.

   Man zeige, dass $(X, \mathcal{T}_d)$ auch ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist. Weiters zeige man, dass keine Nullumgebung bzgl. $\mathcal{T}_d$ beschränkt im Sinne von topologischer Vektorraum ist. Kann es auf X eine Norm geben, die auch $\mathcal{T}_d$ induziert?

6. Man zeige, dass ein topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ genau dann normierbar ist, dh. es gibt eine Norm $\|.\|$ auf X, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\|.\|}$, wenn es eine beschränkte und konvexe Nullumgebung bzgl. $\mathcal{T}$ gibt.

   Hinweis: Betrachten Sie das Minkowski Funktional zu einer kreisförmigen und konvexen Nullumgebung!

7. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem σ-endlichen Maß μ. Weiters sei $h : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Sei $\mathcal{D}_h := \{f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) : h \cdot f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})\}$, und $M_h : \mathcal{D}_h \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ definiert durch $M_h f := h \cdot f$.

   Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) $h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$,

   (ii) $\mathcal{D}_h = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und M_h ist beschränkt,

   (iii) $\mathcal{D}_h = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$.

   Hinweis: Aus der L^2-Konvergenz folgt die Konvergenz einer Teilfolge fast überall!

8. Weisen Sie nach, dass der Raum $C^\infty(\Omega)$ aus Bsp. 2.3.10 lokalkonvex ist!

9. Sei $0 < p < 1$. Zeige: Ist $V \subseteq L^p(0,1)$ Umgebung von 0, und ist V konvex, so folgt $V = L^p(0,1)$.

   Zeigen Sie damit, dass es keine stetige lineare Abbildung $f : L^p(0,1) \to \mathbb{C}$ geben kann (außer der Nullabildung).

   Hinweis: Sei V konvexe Nullumgebung, $r > 0$, sodass $U_r(0) := \{g \in L^p(0,1) : \Delta(g) < r\} \subseteq V$ (vgl. Bsp. 2.3.11). Sei $f \in L^p(0,1)$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{p-1}\Delta(f) < r$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ mit $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = n^{-1}\Delta(f)$ und setze $g_i(t) := nf(t)\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i]}$, sodass $f = n^{-1}(g_1 + \ldots + g_n)$.