Übungen zu Fana1 SS11, 6. Übung

1. Sei Ω eine nichtleere Menge sei $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ der Raum aller beschränkten komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm. Man zeige, dass $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ versehen mit der punktweisen Multiplikation eine Banachalgebra mit Eins ist.

   Weiters bestimme man für ein $\phi \in \mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ sein Spektrum $\sigma(\phi)$ und seinen Spektralradius.

   Ist schließlich Ω mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ versehen, so zeige man, dass $B(\Omega, \mathcal{A})$ (die Menge aller beschränkten und messberen Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$) eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ ist, wobei $\mathrm{Inv}(\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})) \cap B(\Omega, \mathcal{A}) = \mathrm{Inv}(B(\Omega, \mathcal{A}))$.

   Bemerkung: Letzterer Sachverhalt gilt nicht in allen Banachalgebren mit Eins und ihre Unteralgebren.

2. Seien X, Y Banachräume. Sei $S : Y' \to X'$ linear. Man zeige, dass S genau dann stetig mit Y' mit $\sigma(Y', Y)$ und X' mit $\sigma(X', X)$ versehen ist, wenn $S = T'$ für ein $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

3. Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X)$. Man weise nach, dass $\sigma(T) = \sigma(T')$. Sind X und Y Hilberträume, so zeige man auch, dass $\sigma(T) = \{\overline{z} : z \in \sigma(T^*)\}$.

   Schließlich gebe man an, was $\lambda \in \sigma_p(T)$ für T' (Banachraumfall) bzw. für T^* (Hilbertraumfall) bedeutet!

4. Betrachte auf ℓ^p $(1 < p < \infty)$ den Shift-Operator

$$S : \begin{cases} \ell^p & \to & \ell^p \\ (x_1, x_2, \ldots) & \mapsto & (0, x_1, x_2, \ldots) \end{cases}$$

   Zeige: $S \in \mathcal{B}(\ell^p)$, S ist isometrisch, bestimme $\operatorname{ran} S$, zeige $\operatorname{ran} S = \overline{\operatorname{ran} S}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{ran}(S^n) = \{0\}$ sowie $\sigma_p(S) = \emptyset$.

5. Betrachte auf ℓ^p $(1 < p < \infty)$ den Rückwärtsshift-Operator

$$R : \begin{cases} \ell^p & \to & \ell^p \\ (x_1, x_2, \ldots) & \mapsto & (x_2, x_3, \ldots) \end{cases},$$

   und zeige $R \in \mathcal{B}(\ell^p)$, $\sigma_p(R) = \mathbb{D}$, $\sigma(R) = \overline{\mathbb{D}}$. Bestimmen Sie auch $\sigma(S)$, wobei S aus dem letzten Beispiel ist!

6. Sei X eine Menge, μ ein σ-endliches Maß auf X und $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Betrachte den Integraloperator K mit Kern k, das ist der Operator

$$(Kf)(x) := \int_X k(x, t) f(t)\, d\mu(t) .$$

   Dann ist $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ und $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mu \times \mu)}$. Zeigen Sie, dass auch K^* von dieser Bauart ist!

   Man zeige weiters, dass wenn $a_i, b_i \in L^2(\mu)$, $i = 1, \ldots, n$, und $k(s, t) := \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)$ dann $\dim \operatorname{ran}(K) \leq n$.

7. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man, dass für alle $k \in L^2(\mu \times \mu)$ der Integraloperator K mit Kern k kompakt ist.

   Hinweis; zeige zunächst: Ist $(e_i)_{i \in I}$ eine ONB von $L^2(\mu)$, so ist $((s,t) \mapsto e_i(s) \cdot e_j(t))_{i,j \in I}$ eine ONB von $L^2(\mu \times \mu)$.

8. Betrachte den sogenannten Volterra-Operator mit Kern $k \in C([0,1] \times [0,1])$:

$$(Vf)(x) := \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt\ .$$

   Zeige $V \in \mathcal{B}(C[0,1])$, $\|V\| \leq \|k\|_{C([0,1]\times C([0,1])}$, $\|V^n\| \leq \|k\|^n_{C([0,1]\times C([0,1])} \frac{1}{n!}$, $\sigma(V) = \{0\}$ und, dass V kompakt ist.

   Hinweis für die Kompaktheit: Arzela-Ascoli!

   Anmerkung für $k = 1$ ist $(Vf)(x) := \int_0^x f(t)\, dt$.

9. Sei $C^1[0,1]$ versehen mit der Norm

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

   Zeigen Sie, dass $C^1[0,1]$ ein Banachraum ist. Weiters zeige man, dass die Einbettung $\iota : C^1[0,1] \to C[0,1],\ f \mapsto f$ eine kompakte und lineare Abbildung ist.

10. Sei $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformation ist, welche auf dem dichten Teilraum $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gegeben ist durch

$$(Uf)(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-it\zeta)\, d\lambda(t).$$

   Man bestimme $\sigma(U)$ und $\sigma_p(U)$.

   Hinweis: Spektralabbildungssatz und betrachte Funktionen der Bauart $p(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ mit einem Polynom $p(t)$!