Übung zu Funktionalanalysis 1
5.Übung (6.6.2014)

41. Sei X ein Banachraum, $A \in \mathcal{B}(X)$, und $\lambda \in \rho(A)$. Dann gilt $r\big((A-\lambda)^{-1}\big) = d(\lambda, \sigma(A))^{-1}$.

42. Sei X ein Banachraum, $A, T \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in \rho(A)$, und setze $B := A+T$. Wir wissen (Neumannsche Reihe): Ist $\|T\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Unter der Voraussetzung dass $AT = TA$, zeige die stärkere Aussage: Ist $r(T) < r(A^{-1})^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Warum ist diese Aussage eigentlich stärker als die obige?

43. Sei X ein Banachraum, $A, B \in \mathcal{B}(X)$ mit $AB = BA$. Zeige, dass
$$d_H\big(\sigma(A), \sigma(B)\big) \leq r(A-B).$$
Hier bezeichnet d_H die Hausdorff-Metrik auf der Menge $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$, d.h.,
$$d_H(M,N) := \max\Big\{\sup_{x\in M}\inf_{y\in N}|x-y|, \sup_{y\in N}\inf_{x\in M}|x-y|\Big\}.$$
Folgere: Ist $\mathcal{C}$ eine kommutative Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$, so ist die Funktion
$$\Sigma : \begin{cases} (\mathcal{C}, \|.\|_{\mathcal{B}(X)}) & \to \quad (\mathcal{K}(\mathbb{C}), d_H) \\ \qquad\qquad A & \mapsto \quad \sigma(A) \end{cases}$$
stetig.

44. Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X)$.
    (a) Finde eine Charakterisierung von "$\lambda \in \sigma_{app}(T)$" durch eine Eigenschaft des Operators $T - \lambda$.
    (b) Zeige $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{app}(T)$. Kann der Fall eintreten, dass in dieser Inklusion Gleichheit gilt? Kann der Fall eintreten, dass in dieser Inklusion Gleichheit nicht gilt?
    (c) Zeige $\sigma_{app}(T) \subseteq \sigma(T)$ und beantworte die gleichen Fragen.

45. Sei X ein Banachraum und $A, T \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in \rho(A)$ und T kompakt. Zeige, dass $\operatorname{ran}(A+T)$ abgeschlossen ist. Folgere: Ist $A, T \in \mathcal{B}(X)$ und T kompakt, so gilt
$$\rho(A) \subseteq \sigma_p(A+T) \cup \big(\mathbb{C} \setminus \sigma_{app}(A+T)\big).$$

46. Seien X, Y, Z Banachräume, $K \in B(X,Y)$ kompakt und $L \in B(Y,Z)$ injektiv. Zeige, dass
$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, C > 0\ \forall\, x \in X: \quad \|Kx\| \leq \epsilon\|x\| + C\|LKx\|$$

47. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, und betrachte den Operator auf $\ell^2(\mathbb{N})$ der durch die Matrix
$$A := (a_{i+j-1})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \\ a_3 & \cdots & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$
gegeben ist. Explizite agiert A also als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}x_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei (der Einfachheit halber) weiters vorausgesetzt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Zeige, dass A kompakt ist.
Hinweis: Approximiere A mit Operatoren die endlichdimensionales Bild haben.

Multiplikationsoperatoren

48. Sei μ ein σ-endliches Maß auf einer Menge Ω, $1 \leq p < \infty$, $\phi \in L^\infty(\mu)$, und betrachte den Multiplikationsoperator $M_\phi \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$.
    (a) Bestimme jene Funktionen ϕ für die M_ϕ isometrisch ist.

(b) Bestimme jene Funktionen ϕ für die M_ϕ kompakt ist.

49. Sei μ ein σ-endliches Maß auf einer Menge Ω, $1 \leq p < \infty$, und $\phi \in L^\infty(\mu)$. Bestimme das Punktspektrum des Multiplikationsoperators $M_\phi \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$, und zeige dass es höchstens abzählbar ist.

50. Sei μ ein endliches Maß auf einer Menge Ω, $1 \leq p < \infty$, und betrachte die Menge aller Multiplikationsoperatoren
$$\mathcal{M} := \left\{ M_\phi : \phi \in L^\infty(\mu) \right\} \subseteq \mathcal{B}(L^p(\mu)).$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine (bzgl. der Operatornorm) abgeschlossene kommutative Teilalgebra von $\mathcal{B}(L^p(\mu))$ ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{M}$ ein maximales Element in der Menge aller kommutativen Teilalgebren von $\mathcal{B}(L^p(\mu))$ ist.

Hinweis: Für (a) betrachte die Abbildung $\phi \mapsto M_\phi$. Für (b) zeige: Ist $T \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$ mit $TM_\phi = M_\phi T$, $\phi \in L^\infty(\mu)$, dann ist $T = M_\psi$ mit $\psi := T(1)$.