Übung zu Funktionalanalysis 1
7.Übung (27.6.2014)

1. Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum H, sei E sein Spektralmaß, und definiere $E_\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$ als $E_\lambda := E(\sigma(A) \cap (-\infty, \lambda])$.

   Sei $\phi \in C([\gamma_-(A), \gamma_+(A)])$. Zeige, dass der Limes (das Riemann-Stieltjes Integral)

   $$\int_{\gamma_-(A)-}^{\gamma_+(A)} \phi(t)\, dE_\lambda(t) := \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}\big),$$

   wobei die Riemannzerlegung $\mathcal{R}$ die Stützstellen ξ_j und die Zwischenstellen α_j hat, bezüglich der Operatornorm existiert und gleich der (wie in der Vorlesung definierte) Operator $\int (\phi|_{\sigma(A)})\, dE$ ist.

   In vielen Büchern wird $\Phi_E(\phi)$ in dieser –mehr zur klassischen Analysis hin orientierten– Weise eingeführt. Die Funktion E_λ is die Verteilungsfunktion des Spektralmaßes E.

2. Sei P eine orthogonale Projektion in einem Hilbertraum H. Bestimme alle Teile des Spektrums von P $(\sigma(P), \sigma_p(P), \sigma_c(P), \sigma_r(P), \sigma_{app}(P))$. Berechne das zu P gehörige Spektralmaß $E : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$.

3. Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator W mit der Eigenschaft, dass $W|_{(\ker W)^\perp}$ isometrisch ist, heißt partielle Isometrie. Ein Operator mit $(Tx, x) \geq 0$, $x \in H$, heißt positiv.

   Zeige: Sei $T \in \mathcal{B}(H)$. Dann existiert ein positiver Operator A und eine partielle Isometrie W mit $\ker W = \ker A$, $\operatorname{ran} W = \overline{\operatorname{ran} T}$, sodaß $T = WA$. Man spricht von der Polarzerlegung eines Operators, und bezeichnet A auch als $|T|$.
   Hinweis: Definiere A als $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

4. Sei $k \in C([0,1]^2)$ und $K \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ der Integraloperator mit Kern k. Sei weiters $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, sodass K selbstadjungiert ist. Schließlich sei

   $$K = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n$$

   die Spektralzerlegung von K. Zeige:

   (a) Die Eigenfunktionen e_n sind stetig auf $[0,1]$.

   (b) Für jedes $f \in L^2(0,1)$ konvergiert die Reihe $Kf = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(f, e_n)e_n$ absolut und gleichmäßig auf $[0,1]$.

5. Sei $A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ definiert durch

   $$(Af)(x) = i\int_{[0,x]} f\, d\lambda - \frac{i}{2}\int_{[0,1]} f\, d\lambda\,.$$

   Zeige, dass A kompakt und selbstadjungiert ist. Bestimme $\|A\|$, $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $r(A)$, $\gamma_-(A)$, $\gamma_+(A)$, $W(A)$.

6. Betrachte wieder den Operator A aus dem vorigen Beispiel. Für $\lambda \in \sigma_p(A)$ bestimme den Eigenraum $\ker(A - \lambda I)$. Bestimme das Spektralmaß von A, und finde eine Orthonormalbasis des $L^2([0,1])$ die aus aus Eigenvektoren von A besteht.

7. Sei H ein Hilbertraum. Bezeichne

   $$\mathcal{R} := \big\{T \in \mathcal{B}(H) : \dim \operatorname{ran} T < \infty\big\}\,.$$

   Zeige, dass die Menge aller kompakten Operatoren der Abschluß von $\mathcal{R}$ in der Operatornorm ist.

8. Sei $T \in \mathcal{B}(H)$ ein positiver kompakter Operator. In welcher Beziehung stehen die Spektralmaße von T und $T^{\frac{1}{2}}$. Zeige, dass $T^{\frac{1}{2}}$ kompakt ist.

9. Die Schmidt-Reihe für einen kompakten Operator: Sei $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakt. Dann existieren Orthonormalsysteme
$$\{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}, \quad \{\psi_n : n = 1, 2, \ldots\},$$
sowie Zahlen s_n mit $0 < \ldots \leq s_n \leq s_{n-1} \leq \ldots \leq s_1 = \|T\|$, sodass gilt
$$T = \sum_n s_n(\cdot, \phi_n)\psi_n\,,$$
wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert. Die s_n heißen s-Zahlen von T, und ihre Quadrate sind gerade die Eigenwerte von T^*T.
Hinweis: Verwende die Polarzerlegung von T und den Spektralsatz für T^*T.

10. Sei $T \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ der Integraloperator mit Kern $k(x,t) := \chi_{[0,x]}(t)$, das ist also der Operator
$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \;\; f \in L^2(0,1)\,.$$
Bestimme $|T|$, $\sigma(T)$, und berechne die s-Zahlen von T.