101.405 Einführung in Scientific Computing Dienstag, 23.03.2010
Dirk Praetorius
Michael Karkulik

Übung 2

Aufgabe 1. Schreiben Sie eine Funktion `hpGauss`, die eine summierte Gaussregel auf *beliebigen* Gittern mit *beliebiger* Polynomgradverteilung realisiert. Die Inputparameter sind ein function-handle auf die zu integrierende Funktion f, ein Vektor $\mathbf{x} = (a = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N = b)$ und ein Vektor $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1})$. Dabei soll $\mathbf{x}$ das Gitter und $\mathbf{p}$ die Ordnung auf jedem Intervall sein. Die Funktion berechnet also

$$Q_{\mathbf{x},\mathbf{p}}^{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{N-1} Q_{\mathbf{p}_i}^{[\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}]}(f),$$

wobei $Q_{\mathbf{p}_i}^{[\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}]}$ eine Gaussregel auf dem Intervall $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ mit $\mathbf{p}_i$ Punkten ist. Die Funktion soll auch die Anzahl der Funktionsauswertungen von f zurückgeben. Verwenden Sie ihre Funktion `gauss`, um die Gaussknoten und Gewichte zu erzeugen.

Nun berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x) = x^{0.1}$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Schreiben Sie eine Funktion `compareGauss`, in der Sie mit Hilfe von `hpGauss` das Integral von f durch folgende Methoden berechnen:

1. p-Version: Für $p = 2^i$, $i = 1, \dots, 9$ durch Gaussregeln der Ordnung p auf dem Gitter $[0, 1]$.
2. uniforme h-Version: Für $N = 2^i$, $i = 1, \dots, 9$ durch summierte Gaussregeln mit N Teilintervallen und der Ordnung 1.
3. graduierte h-Version: Verwenden Sie dieselbe Methode wie in (2.), allerdings mit *graduierten* Gittern, d.h.: Erzeugen sie ein uniformes Gitter und wenden Sie auf die Knotenpunkte die Funktion $x \mapsto x^3$ an.
4. hp-Version: Sei $\sigma = 0.15$. Ein *geometrisches Gitter* ist ein Gitter der Form

   $$\mathbf{x}_1 = 0, \quad \mathbf{x}_i = \sigma^{N-i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

   Für $N = 2^i$, $i = 1, \dots, 9$, erzeugen Sie ein geometrisches Gitter und eine Polynomgradverteilung, die konstant N ist, und rufen sie `hpGauss` mit diesen Parametern auf.

Plotten sie doppelt logarithmisch die Fehler der vier obigen Versionen gegen ihren jeweiligen Aufwand (also die Anzahl Funktionsauswertungen). Was beobachten Sie?

Aufgabe 2. Nehmen Sie an, sie haben eine Routine für die Auswertung der Funktion f. Ziel ist die Berechnung von $\|f'\|_{L^2(a,b)}$. Eine klassische summierte Quadraturregel ist nicht möglich, da man f' nicht auswerten kann. Sei $\mathcal{T} = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < b = x_N\}$ ein uniformes Gitter auf $[a, b]$ mit Gitterweite h. Man kann so vorgehen:

1. Approximiere f auf jedem Intervall (x_j, x_{j+1}) durch ein Polynom $p_j \in \mathcal{P}_n$.
2. Berechne $\|p'\|_{L^2(a,b)}$ durch eine summierte Quadraturregel mit Schrittweite h.

Es ist approx $= \|p'\|_{L^2(a,b)}$ eine Approximation an $\|f'\|_{L^2(a,b)}$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, das für ein Interpolationspolynom der Ordnung n

$$\|f' - p'\|_{L^\infty(0,h)} = \mathcal{O}(h^n)$$

gilt. Wenn

$$\big|\|f'\|_{L^2(a,b)} - \text{approx}\big| = \mathcal{O}(h^\alpha)$$

gelten soll, wie müssen sie n wählen, und welchen Exaktheitsgrad muss die Quadraturregel für 2. haben?

Schreiben Sie eine Funktion `gaussPrime`, die 1. und 2. realisiert. Die Inputparameter sind ein Handle auf die Funktion f, die Intervallgrenzen a und b, sowie die Anzahl N der Teilintervalle.
Gehen Sie folgendermassen vor: Schreiben Sie $\|f\|^2_{L^2(a,b)}$ als Summe über Intervalle, und transformieren Sie jedes Intervall auf das Referenzelement $[-1, 1]$. Dann können Sie p_j als Interpolationspolynom in den Punkten $\{-1, 0, 1\}$ wählen. Überlegen Sie sich, wie sie dann p'_j in diesen Punkten auswerten können. Verwenden Sie die 3-Punkt Newton Cotes Formel mit den Knoten $\{-1, 0, 1\}$ und den Gewichten $\{1/3,\ 4/3,\ 1/3\}$ für 2. Welches α erreichen Sie damit?