101.405 Einführung in Scientific Computing Dienstag, 20.04.2010
Dirk Praetorius
Michael Karkulik

Übung 4

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u'' + u' + u &= f \quad \text{auf } (a,b) \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Stellen Sie die schwache Formulierung auf. Ist die entstehende Bilinearform $\langle\!\langle \cdot\,;\cdot \rangle\!\rangle$ elliptisch? Gibt es eine Lösung der schwachen Formulierung?

2. Sei $\mathcal{T}_h = \{T_1, \ldots, T_N\}$ ein Gitter auf (a,b) und $\mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$ der Raum der stückweise affinen, global stetigen Funktionen mit der üblichen Basis aus Hutfunktionen. Diskretisieren Sie die schwache Formulierung von (1). Sie erhalten dann ein System

   $$\mathbf{Ax} + \mathbf{Kx} + \mathbf{Mx} = \mathbf{b}.$$

   Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ und den Lastvektor $\mathbf{b}$ kennen sie aus Übung 3, Aufgabe 2. Die Massenmatrix $\mathbf{M}$ kennen Sie aus Übung 3, Aufgabe 1. Es fehlt also noch $\mathbf{K}$. Wie sieht $\mathbf{K}$ aus?

3. Schreiben Sie eine Funktion `fem1D.m`, die die Galerkin-Lösung der schwachen Formulierung berechnet. Gehen Sie wieder elementbasiert vor, und berechnen Sie den Lastvektor mit einer Gaussquadratur. Die Inputparameter sind wie folgt: ein Array `coordinates` $\in \mathbb{R}^{N+1}$, welches die Knoten des Gitters darstellt, sowie ein Array `elements` $\in \mathbb{N}^{N\times 2}$, welches die Elemente darstellt, d.h.: Der Knoten x_k des Gitter ist gespeichert in

   `coordinates(k)` $= x_k$.

   Das Element $T_j = [x_k, x_\ell]$ ist gespeichert als

   `elements(j,:)` $= [k, \ell]$.

   Output soll der Knotenvektor der Galerkinlösung u_h sein.
   Üblicherweise geht man so vor: Man stellt die Matrizen und den Lastvektor auf, ohne die Randbedingungen zu berücksichtigen. Danach streicht man alle Zeilen und Spalten, die zu den Randknoten gehören, und löst dieses System.

4. Die Funktionen $u(x) = x(x-1)$ und $f(x) = x^2 + x - 3$ lösen (1) auf dem Intervall $(0,1)$. Machen Sie Experimente mit verschiedenen Gittern. In der Vorlesung haben Sie gesehen, das die Seminorm $|v|_{H^1} := \|v'\|_{L^2}$ eine äquivalente Norm zu $\|v\|_{H^1}$ ist, es ist also sinnvoll, den Fehler in dieser Seminorm zu betrachten. Das Problem ist nun, das die Identität

   $$|u - u_h|^2_{H^1} = |u|^2_{H^1} - |u_h|^2_{H^1}$$

   nicht mehr gilt (warum?). Man muss also die H^1-Seminorm des Fehlers $|u - u_h|_{H^1}$ mit Quadratur berechnen. Verwenden Sie dazu auf jedem Element eine Gaussregel mit n Punkten. Plotten sie den Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade.