

Übung 7

Aufgabe 1. Es seien `coordinates` $\in \mathbb{R}^{nC \times 2}$ und `elements` $\in \mathbb{R}^{nE \times 3}$ die Datenstrukturen einer Triangulierung \mathcal{T}_h in $2D$, d.h.: der j -te Knoten $\mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch `coordinates(j, :)` $= [x_j, y_j]$, und das k -te Element $T_k = \text{conv}(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_\ell, \mathbf{z}_m)$ (wobei die Knoten mathematisch positiv, also gegen den Uhrzeigersinn nummeriert sind) ist gegeben durch `elements(k, :)` $= [k, \ell, m]$.

Wir betrachten das Laplace-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die FE-Formulierung lautet: Finde $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ mit

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h).$$

Wie in 1D wählt man eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ aus Hutfunktionen $\{\varphi_j\}_j$ und erhält die Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} und den Lastvektor \mathbf{b} . Für die FE-Formulierung streicht man aus \mathbf{A} und \mathbf{b} alle Zeilen und Spalten, die zu Knoten am Rand gehören. Für das Aufstellen von \mathbf{A} und \mathbf{b} läuft man durch alle Elemente und addiert die lokalen Steifigkeitsmatrizen an die richtigen Stellen. Sei $T = \{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_\ell, \mathbf{z}_m\}$ ein Element. Definiere die *local-to-global-map* F_T durch $F_T(1) = k$, $F_T(2) = \ell$, $F_T(3) = m$. Dann ist die lokale Steifigkeitsmatrix \mathbf{A}^T definiert durch

$$\mathbf{A}_{ij}^T = \int_T \nabla \varphi_{F_T(i)} \cdot \nabla \varphi_{F_T(j)}$$

Berechnen Sie \mathbf{A}^T . Transformieren Sie dazu auf das Referenzelement und malen Sie sich am besten ein Bild.

Aufgabe 2. Es bezeichne $\Psi : [0, 1]^2 \rightarrow T_{ref}$ mit $\Psi(s, t) = (s, (1-s)t)$ die Duffy-Transformation. Das Integral einer Funktion f über einem Element T mit Elementabbildung Φ_T kann man dann approximieren durch

$$\int_T f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{j,k=0}^n w_j w_k (1-s_j) f \circ \Phi_T \circ \Psi(s_j, s_k),$$

wobei $(w_j)_{j=1}^n$ und $(s_j)_{j=1}^n$ die Gewichte und Knoten zu einer 1D-Gauss-Legendre Quadratur mit n Punkten sind. Schreiben Sie eine Funktion `[int] = duffyInt(f, coordinates, n)`, die diese Quadratur realisiert. Dabei ist `n` die Anzahl der 1D-Quadraturpunkte, `f` ein function-handle auf die zu integrierende Funktion, und `coordinates` $\in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ seien die Koordinaten der Eckpunkte des Elements T .