101.405 Einführung in Scientific Computing Dienstag, 18.05.2010
Dirk Praetorius
Michael Karkulik

Übung 8

Aufgabe 1. Wir betrachten das Laplace-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die FE-Formulierung lautet: Finde $u_h \in \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h).$$

Wie in 1D wählt man eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ aus Hutfunktionen $\{\varphi_j\}_j$ und erhält die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ und den Lastvektor $\mathbf{b}$. Für die FE-Formulierung streicht man aus $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ alle Zeilen und Spalten, die zu Knoten am Rand gehören. Für das Aufstellen von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ läuft man durch alle Elemente und addiert die lokalen Steifigkeitsmatrizen an die richtigen Stellen (siehe Übung 7).

1. Schreiben Sie eine Funktion `[x,energy] = laplace(f,coordinates,elements,dirichlet)`, welche die FE-Lösung u_h und die Energie $|u_h|^2_{H^1(\Omega)} = \int \nabla u_h \cdot \nabla u_h$ berechnet. Hier ist `x` der Koeffizientenvektor von u_h. Die Arrays `coordinates` und `elements` sind wie in Übung 7. Die Basis des Raumes $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ ist gegeben durch die Hutfunktionen, die implizit durch `coordinates` nummeriert sind. Der function-handle `f` stellt die rechte Seite dar, das Array `dirichlet`$\in \mathbb{R}^{nD\times 2}$ beinhaltet alle Kanten, die auf dem Rand liegen. Der Algorithmus zum Aufstellen der Steifigkeitsmatrix sei element-basiert, verwenden Sie dazu Ihre Erkenntnisse aus Übung 7. Für die Berechnung des Lastvektors verwenden Sie die 1-Punkt-Quadraturregel im Schwerpunkt eines Elements.

2. Schreiben Sie die Datenstruktur für ein grobes Netz auf $\Omega = (0,1)^2$.

3. Schreiben Sie eine Funktion `testLaplace`, die einen uniformen Algorithmus realisiert. Wählen Sie z.B.: $f = 1$. Auf der Homepage gibt es eine Funktion `refineRGB`, die so zu benützen ist:

   ```
   [coordinates,elements,dirichlet] = refineRGB(coordinates,elements,dirichlet,[]);
   ```

   Diese Funktion macht eine uniforme Verfeinerung der Triangulierung. Sie können die Lösung visualisieren durch

   ```
   trisurf(elements(:,1:3),coordinates(:,1),coordinates(:,2),x);
   ```

4. Für den Energiefehler gilt wieder $|u-u_h|^2_{H^1(\Omega)} = |u|^2_{H^1(\Omega)} - |u_h|^2_{H^1(\Omega)}$. Verwenden Sie das Aitkinsche Δ^2-Verfahren aus Übung 2, um $|u|^2_{H^1(\Omega)}$ zu approximieren und plotten Sie den Energiefehler doppelt logarithmisch über Anzahl der Knoten im Gitter.

5. Ersetzen Sie die Mittelpunktsregel für die Berechnung des Lastvektors durch die Integrationsregel auf einem Dreieck mit Hilfe der Duffy-Transformation.

Aufgabe 2. Wir betrachten das gemischte Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ \partial u/\partial n &= \phi && \text{auf } \Gamma_N \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Hier ist $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, und wir setzen $\Gamma \neq \overline{\Gamma_N}$ voraus. Die FE-Formulierung lautet: Finde $u_h \in \mathcal{S}^1_D(\mathcal{T}_h)$ mit

$$\int\limits_\Omega \nabla u_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma_N} \phi(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1_D(\mathcal{T}_h).$$

Hier ist $\mathcal{S}^1_D(\mathcal{T}_h) := \big\{ v \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \mid v|_{\Gamma_D} = 0 \big\}$.

1. Schreiben Sie eine Funktion `[x,energy] = neumann(f,coordinates,elements,dirichlet)`, welche die FE-Lösung u_h und die Energie $\int \nabla u_h \cdot \nabla u_h$ berechnet. Die Parameter sind analog zu Aufgabe 1 zu verstehen. Man kann so vorgehen:

   (i) Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ und Lastvektor $\mathbf{b}$ zu allen Knoten aufstellen

   (ii) Aus $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ alle Zeilen/Spalten streichen, die zu Dirichlet-Knoten gehören

   (iii) Den Vektor $\widetilde{\mathbf{b}}_j := \int_{\Gamma_N} \phi(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ zum Lastvektor $\mathbf{b}$ addieren

   (iv) Lösen