101.405 Einführung in Scientific Computing Dienstag, 25.05.2010
Dirk Praetorius
Michael Karkulik

Übung 9

Aufgabe 1. Stellen Sie Ihre Funktion `laplace` aus der vorigen Übung fertig. Stellen Sie sicher, das Sie die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ als `sparse` angelegt haben. Vermeiden Sie sämtliche überflüssigen Funktionsaufrufe.

Matrizen im `sparse`-Format werden Matlab-intern im CCS-Format (compressed column storage) gespeichert. Wird eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ mit n Nicht-Null-Einträgen in diesem Format gespeichert, wird sie durch folgende Daten repräsentiert:

- Die Grössen M und N,
- Arrays $a \in \mathbb{R}^n$, $I \in \mathbb{N}^n$ und $J \in \mathbb{N}^{N+1}$.
- Für ℓ mit $J(j) \leq \ell < J(j+1)$ und $i = I_\ell$ gilt $a_\ell = \mathbf{A}_{ij}$.
- Der letzte Eintrag von J ist $J(N+1) = n+1$.

1. Wie wird die Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   im CCS-Format gespeichert?

Die Aktualisierung einer Matrix im CCS-Format führt normalerweise auf eine Sortierung, die typischerweise $\mathcal{O}(k)$ Aufwand hat, wenn k die Anzahl der aktuellen Nicht-Null-Einträge ist.

Ihre Funktion `laplace` ist elementbasiert. Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ wird also $\#\mathcal{T}$-mal aktualisiert ($\#\mathcal{T}$ ist Anzahl der Elemente), und in jedem Schritt auch sortiert. Das führt also auf einen Aufwand von $\mathcal{O}(\#\mathcal{T}^2)$. Die Steifigkeitsmatrix hat aber im wesentlichen nur $\#\mathcal{T}$ Einträge.

2. Messen Sie die Zeit für das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix mit dem Befehl `cputime`. Plotten Sie diese Zeit doppelt logarithmisch gegen die Anzahl der Elemente $\#\mathcal{T}$. Was beobachten Sie?

Es ist möglich, linearen Aufwand zu erhalten. Wenn $a \in \mathbb{R}^n$, $I, J \in \mathbb{N}^n$ die Arrays des Koordinaten-Formats sind (a enthält die Einträge, I und J die Zeilen bzw. Spaltenindizes), dann kann durch

```
A = sparse(I,J,a,M,N)
```

eine `sparse`-Matrix erzeugt werden. Wenn Koordinaten (i, j) in $I \times J$ doppelt vorkommen, werden die entsprechenden Einträge der Matrix einfach addiert.

3. Schreiben Sie eine Funktion `laplaceCCS`, die obiges Vorgehen realisiert. Zu Beginn allokieren Sie die Arrays I, J, a mit der richtigen Grösse (welche?). Beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix schreiben Sie nur in diese Arrays. Am Schluss verwenden Sie obigen Befehl, um aus diesen Arrays eine `sparse`-Matrix zu erzeugen.
4. Messen Sie auch hier die Zeit. Was beobachten Sie?