Michael Karkulik
Dirk Praetorius

Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Einführung in Scientific Computing

Projekt 1

Aufgabe 1.1. Überlegen Sie sich einen adaptiven Algorithmus, der, basierend auf einer hp-Quadratur, Integrale der Gestalt

$$Qf := \int_a^b f\,dx$$

numerisch berechnet. Formulieren Sie diesen Algorithmus als Pseudo-Code und implementieren Sie ihn in MATLAB.

Aufgabe 1.2. Überlegen Sie sich mindestens zwei geeignete Testfälle und vergleichen Sie Ihr Programm mit einer uniformen h-Methode und einer p-Methode. Visualisieren Sie die Vergleiche geeignet. Was ist die geeignete Bezugsgröße auf der x-Achse?

Aufgabe 1.3. Betrachten Sie $Qf := \int_0^1 \log(x)\,dx$ und plotten Sie das Konvergenzverhalten Ihres Verfahrens gegen die hp-Strategie aus der Übung (Serie 2).

Aufgabe 1.4. Basierend auf der Duffy-Transformation (siehe Vorlesung) und uniformer Rot-Verfeinerung, kann man Quadraturformeln entwickeln, die für ein nicht-entartetes Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$ das Integral

$$Qf := \int_T f\,dx$$

approximieren. Es sei $p \in \mathbb{N}$ der 1D Quadraturgrad. Welche Konvergenzordnung $|Qf - Q_h f| = \mathcal{O}(h^\alpha)$ erwarten Sie für glattes f in diesem Fall (Beweisidee!)?

Aufgabe 1.5. Entwickeln Sie, basierend auf Duffy-Transformation und Rot-Verfeinerung, eine adaptive hp-Quadratur, die für ein nicht-entartetes Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Integral der Gestalt

$$Qf := \int_T f\,dx$$

berechnet. Formulieren Sie diesen Algorithmus als Pseudo-Code und implementieren Sie ihn in MATLAB.

Aufgabe 1.6. Überlegen Sie sich mindestens zwei geeignete Testfälle und vergleichen Sie Ihr Programm mit einer uniformen h-Methode (d.h. iterierter Rot-Verfeinerung) und einer p-Methode. Visualisieren Sie die Vergleiche geeignet.

Aufgabe 1.7. Für das Referenzdreieck $T = \mathrm{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ betrachten Sie $Qf := \int_T \log|x|\,dx$ und $Qf := \int_T \log|x_1|\,dx$ und plotten Sie das Konvergenzverhalten Ihres Verfahrens für beide Beispiele im Vergleich zu einer uniformen h-Methode und einer p-Methode.

Michael Karkulik
Dirk Praetorius

Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 2

Aufgabe 2.1. Schreiben Sie den Code für eine P1-FEM für das 1D Modellproblem

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad \text{in } \Omega = (0,1)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0) = 0 = u(1).$$

Betrachten Sie dabei den Fall variabler Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, wobei Sie die auftretenden Integrale durch Quadratur realisieren.

Aufgabe 2.2. Wie muss man die Quadratur wählen, damit das Verfahren nicht wesentlich gestört wird (inkl. Beweis!)?

Aufgabe 2.3. Sei $\mathcal{T}_h$ eine Partition von $[0,1]$. Ersetzen Sie in Ihrer Implementierung die Funktionen α, β, γ durch ihre $\mathcal{T}_h$-stückweisen Integralmittel $\alpha_\mathcal{T}, \beta_\mathcal{T}, \gamma_\mathcal{T} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$, z.B.

$$\gamma_\mathcal{T}|_T := \frac{1}{|T|}\int_T \gamma\, dx \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_h.$$

Wird dadurch die Verfahrensordnung gestört?

Aufgabe 2.4. In der Praxis kontrolliert man Quadraturfehler, indem man die Terme der Gestalt $\|\alpha - \alpha_\mathcal{T}\|_{L^\infty(0,1)}$, $\|\beta - \beta_\mathcal{T}\|_{L^2(0,1)}$ und $\|\gamma - \gamma_\mathcal{T}\|_{L^1(0,1)}$ implementiert. Dabei berechnet man beispielsweise sowohl

$$\gamma_\mathcal{T}|_T := \frac{1}{|T|}\int_T \gamma\, dx$$

als auch

$$\|\gamma - \gamma_\mathcal{T}\|_{L^1(0,1)}$$

durch dieselbe Quadraturformel. Welche Konvergenzordnung $Q\gamma := \|\gamma - \gamma_\mathcal{T}\|_{L^1(0,1)} = \mathcal{O}(h^\alpha)$ erwarten Sie? Wie muss man die Quadraturformel wählen, damit der berechnete Wert $Q_h\gamma$ eine Approximation höhrer Ordnung ist, d.h. $|Q\gamma - Q_h\gamma| = \mathcal{O}(h^\beta)$ mit $\beta > \alpha$ (inkl. Beweis!)?

Aufgabe 2.5. Verifizieren Sie für mindestens zwei glatte Funktionen γ die richtige Wahl der Quadraturformel numerisch, d.h. zeigen Sie, dass für eine Implementierung $\widehat{Q}_h\gamma$ höherer Ordnung $Q_h\gamma$ und $\widehat{Q}_h\gamma$ dieselbe Konvergenzordnung haben, aber $|Q_h\gamma - \widehat{Q}_h\gamma|$ von höherer Ordnung ist. Visualisieren Sie dies geeignet!

Aufgabe 2.6. Wie sollte man die Quadraturordnungen für die Terme $\|\alpha - \alpha_\mathcal{T}\|_{L^\infty(0,1)}$ und $\|\beta - \beta_\mathcal{T}\|_{L^2(0,1)}$ wählen (inkl. Beweis!)?

Aufgabe 2.7. Lösen Sie numerisch das Modellproblem mit $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und (stark) oszillierender Funktion $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Plotten Sie den Verfahrensfehler von $u - u_h$ geeignet, und zeichnen Sie auch den Datenapproximationsfehler $Q\gamma := \|\gamma - \gamma_\mathcal{T}\|_{L^1(0,1)}$ ein.

Michael Karkulik
Dirk Praetorius

Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 3

Aufgabe 3.1. Implementieren Sie eine P2-FEM für ein 1D Modellproblem

$$-\alpha u'' + \beta u' + \gamma u = f \quad \text{in } \Omega = (0,1)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0) = 0 = u(1).$$

und konstanten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, d.h. als Ansatz- und Testraum verwenden Sie $\mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h) := \mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h) \cap C[0,1]$. Gilt $\mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h) \subset H_0^1(0,1)$ (Beweis!)?

Aufgabe 3.2. Unter welchen Voraussetzungen an $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist das Modellproblem eine elliptische Gleichung?

Aufgabe 3.3. Was sind geeignete Basisfunktionen für die P2-FEM und wieso?

Aufgabe 3.4. Welche Konvergenzordnung $\|u - u_h\|_{H^1(a,b)} = \mathcal{O}(h^\alpha)$ erwarten Sie, falls die exakte Lösung glatt ist? Wie sollte man die Quadratur zur Aufbau der rechten Seite wählen, um die Verfahrensordnung nicht zu stören (Beweis!)?

Aufgabe 3.5. Implementieren Sie eine adaptive Netzverfeinerung, basierend auf dem $(h - h/2)$-Schätzer für die P2-FEM.

Aufgabe 3.6. Vergleichen Sie im Fall $\alpha = \beta = \gamma = 1$ experimentell die Konvergenzrate für uniforme Netzverfeierung und adaptive Netzverfeinerung. Machen Sie eine experimentelle Studie über mindestens 10 verschiedene Wahlen des Adaptivitätsparameters $0 < \theta \leq 1$. Visualisieren Sie den Fehler über der Anzahl Freiheitsgrade und über der benötigten Rechenzeit. Wie ist dabei die Rechenzeit *sinnvoll* zu definieren? Was beobachten Sie?

Michael Karkulik
Dirk Praetorius

Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 4

Aufgabe 4.1. Implementieren Sie eine P2-FEM für ein 1D Modellproblem

$$-\alpha u'' + \beta u' + \gamma u = f \quad \text{in } \Omega = (0,1)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0) = 0 = u(1).$$

und konstanten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, d.h. als Ansatz- und Testraum verwenden Sie $\mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h) := \mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h) \cap C[0,1]$.

Aufgabe 4.2. Unter welchen Voraussetzungen an α, β, γ ist das Modellproblem eine elliptische Gleichung?

Aufgabe 4.3. Was sind geeignete Basisfunktionen für die P2-FEM und wieso?

Aufgabe 4.4. Welche Konvergenzordnung $\|u - u_h\|_{H^1(a,b)} = \mathcal{O}(h^\alpha)$ erwarten Sie, falls die exakte Lösung glatt ist (Beweis!)?

Aufgabe 4.5. Beweisen Sie, dass P2-FEM mit uniformer Netzverfeinerung auf Konvergenz führt.

Aufgabe 4.6. Wie sieht der gewichtete Residualschätzer in diesem Fall aus? Leiten Sie ihn her und beweisen Sie, dass dieser zuverlässig ist, d.h. eine obere Abschätzung für den Verfahrensfehler $\|u - u_h\|_{H^1(0,1)}$.

Aufgabe 4.7. Implementieren Sie eine adaptive Netzverfeinerung, basierend auf dem Residualschätzer für die P2-FEM.

Aufgabe 4.8. Ist es analytisch gesichert, dass der adaptive Algorithmus auf Konvergenz von u_h gegen u führt?

Aufgabe 4.9. Vergleichen Sie im Fall $\alpha = \beta = \gamma = 1$ experimentell die Konvergenzrate für uniforme Netzverfeierung und adaptive Netzverfeinerung. Machen Sie eine experimentelle Studie über mindestens 10 verschiedene Wahlen des Adaptivitätsparameters $0 < \theta \leq 1$. Visualisieren Sie den Fehler über der Anzahl Freiheitsgrade. Was beobachten Sie?

Michael Karkulik
Dirk Praetorius Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Einführung in Scientific Computing

Projekt 5

Aufgabe 5.1. Betrachten Sie das 2D Neumann-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_n u &= \phi \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Lösung nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist, die z.B. durch die Zusatzforderung $\int_\Omega u\,dx = 0$ fixiert werden kann. Zeigen Sie, dass die schwache Formulierung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_\Gamma \phi v\,ds \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega)$$

genau dann eine eindeutige Lösung $u \in H^1_*(\Omega) := \big\{ v \in H^1(\Omega) \,\big|\, \int_\Omega v\,dx = 0 \big\}$ besitzt, wenn die Daten $\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma \phi\,ds = 0$ erfüllen.

Aufgabe 5.2. Welche Konvergenzordnung erwarten Sie für die P1-FEM mit $\mathcal{S}^1_*(\mathcal{T}_h) := \big\{ v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \,\big|\, \int_\Omega v_h\,dx = 0 \big\}$ (Beweis!)?

Aufgabe 5.3. Implementieren Sie die P1-FEM für $\mathcal{S}^1_*(\mathcal{T}_h)$, wobei Sie die Nebenbedingung explizit ins Gleichungssystem einbauen, d.h. ihr Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{pmatrix} A & c \\ c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind A und b die Galerkin-Daten bezüglich $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$. Was ist der Vektor $c \in \mathbb{R}^N$? Beweisen Sie, dass dieses Gleichungssystem tatsächlich äquivalent zur Galerkin-Formulierung für $\mathcal{S}^1_*(\mathcal{T}_h)$ ist.

Aufgabe 5.4. Implementieren Sie die P1-FEM für $\mathcal{S}^1_z(\mathcal{T}_h) := \big\{ v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \,\big|\, v_h(z) = 0 \big\}$, wobei z ein beliebiger Knoten von $\mathcal{T}_h$ ist. Was ist eine geeignete Basis dieses Raums? Wie ist der Zusammenhang zur vorausgegangenen Aufgabe? Welchen Vorteil hat die Galerkin-Matrix dieses Verfahrens im Vergleich zum vorherigen Galerkin-System?

Aufgabe 5.5. Visualisieren Sie die Konditionszahlen der diskreten Systeme für beide P1-FEM Verfahren. Was beobachten Sie? Wie erklären Sie sich das?

Aufgabe 5.6. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe 5.2 numerisch anhand eines geeignet gewählten Beispiels.

Michael Karkulik
Dirk Praetorius Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 6

Betrachten Sie die P1-FEM für das 2D Modellproblem

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega,\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= \phi \quad \text{auf } \Gamma_N,\\
u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D
\end{aligned}
$$

mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen und $\overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N = \Gamma$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = 0$ sowie $|\Gamma_D| > 0$.

Aufgabe 6.1. Implementieren Sie einen adaptiven Algorithmus, basierend auf dem $(h-h/2)$-Fehlerschätzer $\eta_h := \|u_{h/2} - u_h\|_{H^1(\Omega)}$.

Aufgabe 6.2. Implementieren Sie einen adaptiven Algorithmus, basierend auf dem $(h-h/2)$-artigen Fehlerschätzer $\widetilde{\eta}_h := \|u_{h/2} - I_h u_{h/2}\|_{H^1(\Omega)}$ mit dem nodalen Interpolationsoperators I_h.

Aufgabe 6.3. Beweisen Sie mit Hilfe eines Skalierungsarguments, dass die Abschätzung

$$C^{-1}\,\eta_h \le \widetilde{\eta}_h \le C\,\eta_h$$

mit einer Konstante $C > 0$ gilt, die nur von der Formregularität $\sigma(\mathcal{T}_h)$ abhängt. Beweisen Sie dazu, dass die lokalen Beiträge von $\widetilde{\eta}_h$ sogar

$$\widetilde{\eta}_h(T) \le C\,\big(\min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|u_{h/2} - v_h\|_{L^2(T)} + \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|\nabla(u_{h/2} - v_h)\|_{L^2(T)}\big)$$

für alle $T \in \mathcal{T}_h$ erfüllen.

Aufgabe 6.4. Ist der L^2-Anteil in den Fehlerschätzern η_h und $\widetilde{\eta}_h$ wesentlich, oder reicht es, wenn man statt $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ die H^1-Seminorm $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ betrachtet?

Aufgabe 6.5. Visualisieren Sie auf mindestens drei verschiedenen Geometrien das Konvergenzverhalten von η_h und $\widetilde{\eta}_h$ für uniforme, η_h-adaptive und $\widetilde{\eta}_h$-adaptive Verfeinerung. Wie kann man im Plot die vorausgegangene Abschätzung empirisch verifizieren?

Michael Karkulik
Dirk Praetorius Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 7

Betrachten Sie die P1-FEM für das 2D Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_D \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen $u_D : \Gamma \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 7.1. Für die Netzverfeinerung im Inneren sind in der Simulation Glättungsschätzer weit verbreitet. Dabei betrachtet man die lokalen Beiträge von

$$\eta_h = \min_{q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)^2} \|\nabla u_h - q_h\|_{L^2(\Omega)}$$

zur Markierung. Implementieren Sie eine Funktion, die die lokalen Beiträge von η_h zurückgibt.

Aufgabe 7.2. Der Schätzer η_h aus der vorausgegangenen Aufgabe benötigt die Berechnung der L^2-Orthogonalprojektion. Alternativ kann man ∇u_h durch Postprocessing glätten, z.B.

$$\widetilde{\eta}_h = \|\nabla u_h - J_h(\nabla u_h)\|_{L^2(\Omega)}$$

mit dem Clément-Operator $J_h : L^2(\Omega)^2 \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)^2$, der knotenweise durch

$$J_h q(z) = \frac{1}{|\omega_z|} \int_{\omega_z} q \, dx \quad \text{für } z \in \mathcal{K}_h$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $\omega_z := \big\{x \in T \,\big|\, T \in \mathcal{T}_h \text{ mit } z \in T\big\}$ den Patch von $z \in \mathcal{K}_h$. Implementieren Sie eine Funktion, die die lokalen Beiträge von $\widetilde{\eta}_h$ zurückgibt.

Aufgabe 7.3. Die Glättungsschätzer sehen üblicherweise nicht die Approximation der Dirichlet-Daten u_D. Diese kann bei nodaler Interpolation am Rand durch

$$\text{osc}_h := \|h^{1/2}(u_D - u_{Dh})'\|_{L^2(\Gamma)}$$

kontrolliert werden. Dabei bezeichnet $(\cdot)'$ die Ableitung nach der Bogenlänge. Welche Ordnung $\text{osc}_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$ erwarten Sie für glattes u_D bestenfalls? Entwickeln Sie eine geeignete Quadraturformel, sodass das mittels Quadratur berechnete $\widetilde{\text{osc}}_h$ auf

$$|\text{osc}_h - \widetilde{\text{osc}}_h| = \mathcal{O}(h^\beta)$$

mit $\beta > \alpha$ führt, d.h. der Quadraturfehler ist von höherer Ordnung.

Aufgabe 7.4. Implementieren Sie einen adaptiven Algorithmus, der das Netz, basierend auf η_h (bzw. $\widetilde{\eta}_h$) und geeignet kombiniert mit μ_h, verfeinert.

Aufgabe 7.5. Visualisieren Sie für uniforme und adaptive Netzverfeinerung die Größen η_h, $\widetilde{\eta}_h$ und μ_h. Welche Konvergenzordnungen beobachten Sie?

Michael Karkulik
Dirk Praetorius Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 8

Aufgabe 8.1. Betrachten Sie die P2-FEM für das 2D Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

d.h. wir approximieren $u \approx u_h \in \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h) := \mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h) \cap C(\Omega)$. Gilt $\mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h) \subset H_0^1(\mathcal{T}_h)$ (Beweis!)?

Aufgabe 8.2. Welche Dimension hat $\mathcal{P}^2(T)$ für ein nicht-entartetes Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$? Geben Sie für das Referenzdreieck $T = \operatorname{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ geeignete Basisfunktionen an. Begründen Sie, warum diese geeignet sind!

Aufgabe 8.3. Implementieren Sie die P2-FEM für das Modellproblem in Matlab.

Aufgabe 8.4. Welche Konvergenzrate ist maximal mit P2-FEM erreichbar? Unter welchen Regularitätsannahmen wird sie garantiert? (Beweisidee!)

Aufgabe 8.5. Verifizieren Sie Ihre Aussage aus der vorausgegangenen Aufgabe anhand eines geeignet gewählten Beispiels numerisch.

Aufgabe 8.6. Implementieren Sie, basierend auf dem $(h-h/2)$-Fehlerschätzer einen adaptiven Algorithmus.

Aufgabe 8.7. Vergleichen und visualisieren Sie für mindestens drei verschiedene Geometrien das Konvergenzverhalten von $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ für uniforme und adaptive Netzverfeinerung.

Michael Karkulik
Dirk Praetorius Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 9

Aufgabe 9.1. Implementieren Sie die P1-FEM für das 2D Reaktions-Diffusionsmodell

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

mit einem Parameter $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 9.2. Leiten Sie die schwache Form des Modellproblems her und zeigen Sie, dass diese eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ hat.

Aufgabe 9.3. Welche Konvergenzrate erwarten Sie für die P1-FEM maximal (Beweisidee!)? Beweisen Sie, dass diese Konvergenzrate im Allgemeinen nicht verbesserbar ist.

Aufgabe 9.4. Verifizieren Sie Ihre Aussage aus der vorausgegangenen Aufgabe anhand eines geeignet gewählten numerischen Experiments.

Aufgabe 9.5. Vergleichen und visualiseren Sie das Konvergenzverhalten $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ für $f = 1$ auf verschiedenen Geometrien und für $\varepsilon \in \{10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000\}$. Was beobachten Sie?

Aufgabe 9.6. Welches Verhalten erwarten Sie im Fall $\varepsilon \to 0$?

Aufgabe 9.7. Was ist die geeignete Energienorm $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ für das Modellproblem? Implementieren Sie, basierend auf dem $(h{-}h/2)$-Schätzer η_h, eine adaptive Netzverfeinerungsstrategie, wobei Sie für η_h verschiedene Normen verwenden — zumindest $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ und Energienorm.

Aufgabe 9.8. Vergleichen und visualisieren Sie für mindestens zwei verschiedene Geometrien das Konvergenzverhalten $|\!|\!|u - u_h|\!|\!|$ für uniforme und adaptive Netzverfeinerung, basierend auf den verschiedenen η_h-Schätzern. Was beobachten Sie?

Michael Karkulik
Dirk Praetorius Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 10

Aufgabe 10.1. Ziel ist es, die Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

durch eine Randelementmethode zu lösen. Die zu (1) äquivalente Integralgleichung lautet

$$V\phi = (K + 1/2)g,$$

und nodale Interpolation G_ℓ von g führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Vx} = \mathbf{Kg} + \frac{1}{2}\mathbf{Mg},$$

welches Sie durch Routinen aus der Übung lösen können.

Aufgabe 10.2. Der Fehler, der durch die nodale Interpolation G_ℓ von g induziert wird, kann durch sogenannte Oszillationsterme

$$\mathrm{osc}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(g - G_\ell)'\|_{L_2(\Gamma)}$$

kontrolliert werden. Schreiben Sie eine Routine, die für ein gegebenes Randgitter, g und G_ℓ die elementweisen Beiträge von osc_ℓ^2 zurückgibt. Verwenden Sie dazu die Erkenntnisse aus Übung 2, Aufgabe 2.

Aufgabe 10.3. Um den Fehler der Galerkinlösung $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ zu kontrollieren, kann man den gewichteten Residualschätzer

$$\rho_\ell := \|h_\ell^{1/2}(V\Phi_\ell - (K + 1/2)G_\ell)'\|_{L_2(\Gamma)}$$

verwenden. Schreiben Sie eine Routine, die ρ_ℓ berechnet. Die Auswertungsroutinen für V und K haben sie bereits. Gehen Sie nun vor wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 10.4. Die Implementierung von osc_ℓ und ρ_ℓ benötigt geeignete Quadrature. Wie muss man die Quadratur wählen, damit beispielsweise die faktisch berechnete Approximation $\widetilde{\mathrm{osc}}_\ell$ von osc_ℓ auf höhere Ordnung führt, d.h. für glattes g gelten

$$\mathrm{osc}_\ell = \mathcal{O}(h^\alpha) = \widetilde{\mathrm{osc}}_\ell \quad \text{und} \quad |\mathrm{osc}_\ell - \widetilde{\mathrm{osc}}_\ell| = \mathcal{O}(h^\beta)$$

mit $0 < \alpha < \beta$. Was müssen die gewählten Quadraturen erfüllen, und welchen konkreten Werte α, β liefert dies?

Aufgabe 10.5. Schreiben Sie einen adaptiven Algorithmus, der durch den Fehlerschätzer

$$\mu_\ell := \rho_\ell + \mathrm{osc}_\ell$$

gesteuert wird. Verwenden Sie die Dörfler-Strategie zur Markierung und die Netzverfeinerung aus der Übung. Welche Konvergenzordnung können Sie durch ein *uniformes* Verfahren erhalten, und welche Annahmen müssen sie an die exakte Lösung stellen?

Aufgabe 10.6. Erfüllt die Funktion $u(x, y) = \mathrm{real}((x + iy)^\alpha)$ die PDE (1)? Das Gebiet Ω sei das L-Shape $[-1, 1]^2 \setminus [0, 1]^2$, das durch $\frac{3}{2}\pi$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht wurde und mittels geeigneter Skalierung $\mathrm{diam}(\Omega) < 1$ erfüllt. Lösen Sie dann die Randintegralgleichung für $\alpha = 2/3$ und plotten Sie μ_ℓ über der Anzahl der Freiheitsgrade für uniformen und adaptiven Algorithmus.

Michael Karkulik
Dirk Praetorius Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Projekt 11

Wir betrachten die Laplace-Gleichung mit Robin-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \beta u + \partial_{\mathbf{n}} u &= g \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$, $\beta \in L^\infty(\Gamma)$ und $\beta \geq \beta_0 > 0$ fast überall auf Γ gilt.

Aufgabe 11.1. Wie lautet die schwache Formulierung von (2)? Integrieren Sie partiell und setzen Sie die Randbedingungen ein. Was ist eine mögliche physikalische Interpretation der Robin-Randbedingung, z.B. im Fall $g = \beta u_R$ und $u_R \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 11.2. Zeigen Sie, dass die schwache Formulierung eine eindeutige Lösung besitzt. Benutzen Sie dazu folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz: Es sei $|\cdot|$ eine stetige Halbnorm auf $H^1(\Omega)$ mit

$$|c| = 0 \implies c = 0 \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}$$

Dann ist $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + |u|$ eine äquivalente Norm auf $H^1(\Omega)$. ■

Was passiert, wenn $\beta = 0$ auf einer messbaren Teilmenge von Γ ist?

Aufgabe 11.3. Schreiben Sie einen Code, der für gegebenes f, β und g die Finite Elemente Lösung berechnet.

Aufgabe 11.4. Implementieren Sie einen adaptiven Algorithmus auf Basis des residualen Fehlerschätzers

$$\rho_\ell(T)^2 := h(T)^2 \|f\|^2_{L^2(T)} + h(T) \Big(\|g - \beta U_\ell - \partial_{\mathbf{n}} U_\ell\|^2_{L_2(\partial T \cap \Gamma)} + \|[\partial_{\mathbf{n}} U_\ell]\|^2_{L^2(\partial T \cap \Omega)} \Big).$$

Hier ist $[\partial_{\mathbf{n}} U_\ell]$ der Sprung der Normalenableitung über den Rand von T.

Aufgabe 11.5. Welche Konvergenzordnung können Sie für einen uniformen Algorithmus erwarten (Beweisidee?) ? Machen Sie Experimente mit verschiedenen Geometrien Ω und verschiedene Funktionen β und g. Was beobachten Sie?

Michael Karkulik
Dirk Praetorius

Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Einführung in Scientific Computing

Projekt 12

Wir betrachten die Konvektions-Diffusionsgleichung für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} -\Delta u + \beta \cdot \nabla u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Hier ist $\beta \in \mathbb{R}^2$ ein konstanter Vektor.

Aufgabe 12.1. Wie lautet die schwache Formulierung von (3)? Besitzt die schwache Formulierung eine eindeutige Lösung? (inkl. Beweis bzw. Gegenbeispiel)

Aufgabe 12.2. Implementieren Sie eine Finite Elemente Methode zur Lösung von (3). Um die inhomogenen Dirichletdaten einzubauen, gehen Sie vor wie in der Übung: wählen Sie eine Funktion u_A mit $u_A|_\Gamma = G_\ell$, wobei G_ℓ die nodale Interpolation von g, dann löst $u - u_A$ das homogene Dirichleproblem.

Aufgabe 12.3. Die Funktion

$$u(x,y) = x \left(\frac{1 - e^{(y-1)/\varepsilon}}{1 - e^{-2\varepsilon}} \right)$$

löst (3) auf $\Omega = (-1,1)^2$ mit $\beta = (0,1)$. Plotten Sie die Funktion für $\varepsilon \ll 1$. Wie fein müssen sie das Gitter wählen, damit ihre FEM-Lösung (zumindest in Augenmetrik) sinnvoll scheint?