

Übung 3

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_{N-1}\}$ mit Knoten $\mathcal{K} = \{a = x_1, \dots, x_N = b\}$ und Elementen $T_j = [x_j, x_{j+1}]$ ein Gitter auf $[a, b]$. Sei $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) = \{u \in C(a, b) \mid u|_T \in \mathcal{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}\}$ der Raum der stückweise affinen, global stetigen Funktionen. Sei $\Pi^{\mathcal{T}} : L^2(a, b) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ die L^2 -Orthogonalprojektion.

Schreiben Sie eine Funktion `L2projection`, die $\Pi^{\mathcal{T}}$ realisiert. Die Inputparameter sind ein function-handle auf die zu approximierende Funktion und ein Vektor $\mathbf{x} = (a = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N = b)$ der das Gitter sein soll. Die Ausgabeparameter ist ein Vektor, der die Knotenwerte von $\Pi^{\mathcal{T}} u$ enthält, sowie die *Energie* von $\Pi^{\mathcal{T}} u$.

1. Überlegen Sie sich zuerst, welche Konvergenzordnung Sie für $\|u - \Pi^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a,b)}$ maximal erreichen können.
2. Schreiben Sie die Funktion `L2projection`. Gehen Sie dazu element-basiert vor, wie in der Vorlesung angegeben. Warum wählt man als Basis die Hutfunktionen, und warum indiziert man diese Basis von links nach rechts? Die *Massenmatrix* \mathbf{A} können Sie analytisch berechnen (siehe Vorlesung), den *Lastvektor* \mathbf{b} jedoch nicht. Verwenden Sie dazu auf jedem Element eine Gaussregel mit n Punkten.
3. Die Funktion soll auch die *Energie* von $\Pi^{\mathcal{T}} u$ berechnen, die durch $\|\Pi^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a,b)}^2$ definiert ist. Überlegen Sie sich, wie Sie die Energie nur mit Hilfe des Knotenvektors und der Massenmatrix bzw. des Lastvektors berechnen können.
4. Der Energiefehler $\|u - \Pi^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a,b)}$ ist von Interesse. Angenommen, Sie kennen von der Funktion u die $L^2(a, b)$ -Norm. Wie können Sie den Energiefehler bestimmen? Wie kann man in Experimenten $\|u - \Pi_a^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a,b)}$ berechnen, wenn man die L^2 -Norm von u nicht kennt?
5. Machen Sie Experimente mit Gittern unterschiedlicher Gitterweite. Verwenden Sie wieder die Funktionen $x^{1/10}$ und e^x . Welche Konvergenzordnungen stellen sich für den Energiefehler ein? Wie kann man die maximale Konvergenzordnung für die Funktion $x^{1/10}$ erhalten?

Aufgabe 2. Betrachten Sie das Skalarprodukt

$$a(u, v) := \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \left(\int_a^b u(x)dx \right) \left(\int_a^b v(x)dx \right).$$

Es sei $\Pi_a^{\mathcal{T}} : C^1[a, b] \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ die Orthogonalprojektion bezüglich dieses Skalarprodukts. Dabei seien \mathcal{T} und $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ wie oben.

1. Sei $\|\cdot\|_a^2 := a(\cdot, \cdot)$ die induzierte Norm. Welche Konvergenzordnung erwarten Sie für $\|u - \Pi_a^{\mathcal{T}} u\|_a$?
2. Schreiben Sie eine Funktion `solve_neumann`, die $\Pi_a^{\mathcal{T}}$ realisiert. Inputparameter sind wieder ein Vektor \mathbf{x} wie oben und ein function-handle auf f . Rückgabewert ist wieder der Knotenvektor von $\Pi_a^{\mathcal{T}} f$ und die Energie $\|\Pi_a^{\mathcal{T}} f\|_a^2$. Berechnen Sie die Energie wie in Aufgabe 1. Gehen Sie wieder element-basiert vor, um die *Steifigkeitsmatrix* $\mathbf{A}_{ij} = \int \varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx$ zu berechnen. Wie können Sie das analytisch machen? Die Stabilisierung $\mathbf{C}_{ij} = \int \varphi_j(x)dx \int \varphi_i(x)dx$ ist eine Rang-1 Matrix, da Sie als Produkt von zwei Vektoren geschrieben werden kann. Nutzen Sie das in der Implementierung aus.
3. Betrachten Sie die Approximation der Funktion $\cos(x)$ auf dem Intervall $(0, 2\pi)$. Machen Sie Experimente mit verschiedenen Gittern und plotten Sie den Energiefehler.