101.405 Einführung in Scientific Computing Dienstag, 14.05.2012
Dirk Praetorius
Michael Karkulik

Übung 7

Aufgabe 1. Es seien `coordinates` $\in \mathbb{R}^{nC\times 2}$ und `elements` $\in \mathbb{R}^{nE\times 3}$ die Datenstrukturen einer Triangulierung $\mathcal{T}_h$ in $2D$, d.h.: der j-te Knoten $\mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch `coordinates`$(j,:) = [x_j, y_j]$, und das j-te Element $T_j = \mathrm{conv}(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_\ell, \mathbf{z}_m)$ (wobei die Knoten mathematisch positiv, also gegen den Uhrzeigersinn nummeriert sind) ist gegeben durch `elements`$(j,:) = [k, \ell, m]$.

Wir betrachten das Laplace-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die FE-Formulierung lautet: Finde $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_\Omega f v_h \qquad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h).$$

Wie in 1D wählt man eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ aus Hutfunktionen $\{\varphi_j\}_j$ und erhält die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ und den Lastvektor $\mathbf{b}$. Für die FE-Formulierung streicht man aus $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ alle Zeilen und Spalten, die zu Knoten am Rand gehören. Für das Aufstellen von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ läuft man durch alle Elemente und addiert die lokalen Steifigkeitsmatrizen an die richtigen Stellen. Sei $T = \{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_\ell, \mathbf{z}_m\}$ ein Element. Definiere die *local-to-global-map* F_T durch $F_T(1) = k$, $F_T(2) = \ell$, $F_T(3) = m$. Dann ist die lokale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}^T$ definiert durch

$$\mathbf{A}^T_{ij} = \int_T \nabla\varphi_{F_T(i)} \cdot \nabla\varphi_{F_T(j)}$$

Berechnen Sie $\mathbf{A}^T$. Transformieren Sie dazu auf das Referenzelement und malen Sie sich am besten ein Bild.

Aufgabe 2. Es bezeichne $\Psi : [0,1]^2 \to T_{ref}$ mit $\Psi(s,t) = (s, (1-s)t)$ die Duffy-Transformation. Das Integral einer Funktion f über einem Element T mit Elementabbildung Φ_T kann man dann approximieren durch

$$\int_T f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \approx \sum_{j,k=0}^{n} w_j w_k (1-s_j) f \circ \Phi_T \circ \Psi(s_j, s_k),$$

wobei $(w_j)_{j=1}^n$ und $(s_j)_{j=1}^n$ die Gewichte und Knoten zu einer 1D-Gauss-Legendre Quadratur mit n Punkten sind. Schreiben Sie eine Funktion `[int] = duffyInt(f,coordinates,n)`, die diese Quadratur realisiert. Dabei ist `n` die Anzahl der 1D-Quadraturpunkte, `f` ein function-handle auf die zu integrierende Funktion, und `coordinates` $\in \mathbb{R}^{3\times 2}$ seien die Koordinaten der Eckpunkte des Elements T.