101.405 Einführung in Scientific Computing Montag, 04.06.2010
Dirk Praetorius
Michael Karkulik

Übung 09

Aufgabe 2. Wir betrachten das Dirichletproblem in 2D:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u|_\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

Für ein gegebenes Gitter $\mathcal{T}_\ell$ können Sie dieses Problem mit ihrem Code aus Übung 8 lösen.

1. Zu einem Gitter $\mathcal{T}_\ell$ bezeichne $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ ein uniform verfeinertes Gitter, welches durch NVB-Verfeinerung entsteht. Das Gitter $\mathcal{T}_\ell$ ist gegeben durch `coordinates` und `elements`. Das Gitter $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ ist gegeben durch `coordinates_fine` und `elements_fine`, und `f2s` liefert zu jedem Element aus $\mathcal{T}_\ell$ dessen Söhne aus $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ im Uhrzeigersinn, d.h. die Söhne von `elements(m,:)` aus $\mathcal{T}_\ell$ sind gegeben durch `elements_fine(f2s(m,i),:)` für `i`$= 1, \dots, 4$. Wir nehmen ausserdem an, dass

   `coordinates_fine(1:size(coordinates,1),:) = coordinates`.

   Es bezeichnet $\widehat{U}_\ell$ die FEM-Lösung auf $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$. Ein Fehlerschätzer μ_ℓ ist dann gegeben durch

   $$\mu_\ell(T)^2 = \|\nabla(\widehat{U}_\ell - I_\ell \widehat{U}_\ell)\|^2_{L_2(T)}$$

   Hier ist $I_\ell : C(\Omega) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ die nodale Interpolation in den Knoten von $\mathcal{T}_\ell$. Schreiben Sie eine Funktion

   `[mu1] = computeMu(coordinates,elements,coordinates_fine,elements_fine,f2s,x_fine)`,

   die für jedes Element $T \in \mathcal{T}_\ell$ die Beiträge $\mu_{1,\ell}(T)^2$ und $\mu_{2,\ell}(T)^2$ berechnet.

2. Realisieren Sie den folgenden adaptiven Algorithmus:

   (0) Input: Gitter $\mathcal{T}_0$, Funktion f, Parameter $0 < \theta \le 1$ Zähler $\ell = 0$

   (i) erzeuge uniform verfeinertes Gitter $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$

   (ii) berechne FEM-Lösung $\widehat{U}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$

   (iii) bestimme Verfeinerungsindikatoren μ_ℓ

   (iv) Bestimme kleinste Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ mit

   $$\theta \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \mu_\ell(T)^2 \le \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \mu_\ell(T)^2$$

   (v) Verfeinere $\mathcal{T}_\ell$ zumindest in den Elementen $\mathcal{M}_\ell$ und erhalte $\mathcal{T}_{\ell+1}$

   (vi) gehe zu (i)

   Sie können die Funktionen `refineNVB` und `doerfler_marking` von der Homepage verwenden. In Schritt (i) so:

```
[co_f,el_f,dir_f,neu_f,f2s] = ...
refineNVB(coordinates,elements,dirichlet,[],[1:size(elements,1)])
```

und in den Schritten (iv) und (v) so:

```
marked = doerfler_marking(ind,0.2);
[coordinates,elements,dirichlet,neumann] = ...
refineNVB(coordinates,elements,dirichlet,[],marked);
```

3. Welche Konvergenzordnung $\alpha > 0$, also $\mathcal{O}(\#\mathcal{T}_\ell^{-\alpha})$, können Sie für den Fehlerschätzer maximal erwarten? Plotten Sie den Schätzer über der Anzahl der Elemente für verschiedene Geometrien (Quadrat, L-Shape). Was beobachten Sie?