101.405 Einführung in Scientific Computing Montag, 11.06.2012
Dirk Praetorius
Michael Karkulik

Übung 10

Aufgabe 1. Es bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ und u eine Funktion definiert auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die sogenannte Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\Gamma_D} &= 0 \\ \partial_n u|_{\Gamma_N} &= 0 \\ u(t=0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Wir setzen zunächst einmal $f = 0$, d.h. es ist keine Wärmequelle involviert. Wir lösen dies Gleichung numerisch, indem wir u im Ort durch den FEM-Raum $V = \{v \in \mathcal{S}^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\}$ approximieren. In der Zeit verwenden wir finite Differenzen. Wir wollen die Gleichung auf dem Zeitintervall $[0, T]$ für einen fixen Endzeitpunkt T lösen. Dazu wählen wir uns einen Endzeitpunkt T, eine Zeitschrittweite Δt, $N = T/\Delta t$, und setzen $t_n = 0 + n\Delta t$ für $n = 0, \ldots, N$. Es bezeichne $\mathbf{A}$ die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{M}$ die Massematrix. Die FEM-Approximation U^n von u zum Zeitpunkt t_n kann approximiert werden durch das sogenannte θ-Verfahren

$$\mathbf{M}\frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} + \mathbf{A}(\theta U^n + (1-\theta)U^{n-1}) = 0 \quad \text{für } n = 1, \ldots, N,$$
$$U^0 = I u_0,$$

wobei I die nodale Interpolation in den Knoten beschreibt. Es muss $0 \le \theta \le 1$ gelten.

1. Schreiben Sie eine Funktion `[t,u] = heatflow(coordinates,elements,dirichlet,u0,theta,T,N)`, welches das obige Problem löst. Der Zeilenvektor `t` enthält die Zeiten t_n und die Matrix `u` enthält Zeilenweise die dazugehörigen Knotenwerte der Lösungen zu diesen Zeiten.

2. Schreiben Sie eine Funktion `testheatflow`. Importieren Sie eine Datenstruktur für ein grobes Netz, verfeinern Sie dieses Netz k mal mit `refineNVB`. Wählen Sie dann einen beliebigen Anfangswert u_0 in den Knoten und lösen Sie das Problem mit `heatflow`. Wenn sie eine Schleife über die Zeitschritte laufen lassen, können Sie die Lösungen zu den verschiedenen Zeiten plotten. Mit `pause(0.01)` können Sie zb. eine Pause von 10ms einbauen.

3. Drehen Sie an u_0, k, T, N, `dirichlet`, `neumann` und erfreuen Sie sich an den netten Bildern.