Michael Feischl
Dirk Praetorius Sommersemester 2014
17. März 2014

Übungen zur Vorlesung Einführung in Scientific Computing

Serie 1

Aufgabe 1.1. Die Gaussquadratur auf $(-1, 1)$ mit dem Gewicht $w = 1$ nennt man *Gauss-Legendre*-Quadratur. Schreiben Sie eine Funktion

```
[nodes,weights] = gauss(n,varargin)
```

die für `n` $\in \mathbb{N}$ die Knoten und Gewichte der n-Punkt Gauss-Legendre-Quadratur berechnet (**Achtung:** Im Gegensatz zur Vorlesung ist hier `n` die Anzahl der Knoten!) Dabei soll `nodes` $\in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ein Spaltenvektor und `weights` $\in \mathbb{R}^{1\times n}$ ein Zeilenvektor sein. Optional können Parameter `a` $\in \mathbb{R}$ und `b` $\in \mathbb{R}$ übergeben werden, d.h.

- `[nodes,weights]=gauss(n)` liefert die Knoten auf dem Intervall $[-1, 1]$,
- `[nodes,weights]=gauss(n,a,b)` liefert die Knoten auf dem Intervall $[a, b]$.

Zur Bestimmung der Knoten und Gewichte auf $[-1, 1]$ verwenden Sie den folgenden Satz.

Satz 1 (Golub-Welsh)**.** *Die Eigenwerte der Matrix*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_1 & 0 & -\beta_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\beta_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}n \times n,$$

mit $\beta_k := \frac{k}{\sqrt{4k^2-1}}$, sind die Knoten der n-Punkt Gauss-Legendre Quadratur. Sei $v^{(i)}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_i. Die Gewichte w_i sind gegeben durch

$$w_i = 2\frac{(v_1^{(i)})^2}{\|v^{(i)}\|_2^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Knoten und Gewichte für ein beliebiges (kompaktes) Intervall $[a, b]$ erhält man ggf. durch affine Transformation.

Aufgabe 1.2. Welchen Exaktheitsgrad erwarten Sie für die Quadraturformel aus Aufgabe 1.1? Validieren Sie Ihren Code und Ihre Vorhersage, indem Sie auf verschiedenen Intervallen $[a, b]$ und für fixes $k \in \mathbb{N}$ das Integral des Monoms x^k ausrechnen. Plotten Sie den Fehler von exaktem Integral und Quadraturergebnis mit `semilogy` über n. Für hinreichend großes n muss dieser Fehler numerisch null sein.

Aufgabe 1.3. Überlegen Sie sich Folgendes: Sie haben ein Gesetz der Form

$$e(N) = C \cdot N^{-\alpha} \qquad \text{mit } \alpha > 0,$$

wobei $C > 0$ unabhängig von N und α ist. Die Funktion e beschreibt zum Beispiel den Fehler in einem numerischen Verfahren, wobei N die Anzahl der Freiheitsgrade, die Gitterweite (mit $N = 1/h$), der Polynomgrad usw. sein kann. Man nennt α die (algebraische) Konvergenzrate.

(a) Angenommen, sie können Experimente mit verschiedenen Werten von N machen, wie können sie α experimentell bestimmen?

(b) Konvergenzraten werden in der Numerik üblicherweise mit Hilfe von Konvergenzgraphen visualisiert. Dazu macht man Experimente mit verschiedenen N und plottet die Resultate auf einer doppelt logarithmischen Skala (in Matlab mit dem Befehl `loglog`). Wie können sie in einem solchen Plot α erkennen?

Aufgabe 1.4. Wir betrachten für festen Quadraturgrad n das Integral $\int_0^h \exp(x)$. Welches Konvergenzverhalten $\mathcal{O}(h^\alpha)$ erwarten Sie für $h \to 0$? Plotten Sie für verschiedene $n \in \mathbb{N}$ und $h = 2^{-k}$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ den Fehler von exaktem Integral und Quadraturergebnis geeignet. Welches Konvergenzverhalten beobachten Sie numerisch? Stimmt dies mit dem theoretisch erwarteten überein?

Aufgabe 1.5. Wiederholen Sie die vorausgegangene Aufgabe für das Integral $\int_0^h x^\beta$ mit $\beta \in \{1.1, 1.7, 2.5\}$. Was beobachten Sie jetzt? Widerspricht dies der Analysis?