Michael Feischl
Dirk Praetorius

Sommersemester 2014
28. April 2014

Übungen zur Vorlesung Einführung in Scientific Computing

Serie 5

Aufgabe 5.1. Es bezeichne $I_h v : H^2(a,b) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ den nodalen Interpolanten aus der Vorlesung. Schreiben Sie eine MATLAB-funktion. Überprüfen Sie folgende Aussagen, die in der Vorlesung als hinreichend bewiesen wurden, numerisch auf Notwendigkeit und schätzen Sie die Konstanten $0 < C_1, C_2, C_3 \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\|u - I_h u\|_{L^2(a,b)} &\leq C_1 \|h(u - I_h u)'\|_{L^2(a,b)} \leq \|hu'\|_{L^2(a,b)} \quad \text{für alle } u \in H^1(a,b),\\
\|u - I_h u\|_{L^2(a,b)} &\leq C_2 \|h^2(u - I_h u)''\|_{L^2(a,b)} \quad \text{für alle } u \in H^2(a,b),\\
\|(u - I_h u)'\|_{L^2(a,b)} &\leq C_3 \|h(u - I_h u)''\|_{L^2(a,b)} \quad \text{für alle } u \in H^2(a,b).
\end{aligned}$$

Wählen Sie dazu geeignete Funktionen u, und plotten Sie die Interpolationsfehler für verschiedene Netzweiten h. Gibt es Funktionen, welche die obigen Abschätzungen mit Gleichheit und $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ erfüllen, ohne dass dabei beide Seiten verschwinden?

Aufgabe 5.2. In der Vorlesung wurde folgende inverse Ungleichung gezeigt

$$\|hv_h'\|_{L^2(a,b)} \leq C_{\rm inv} \|v_h\|_{L^2(a,b)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h).$$

Wählen Sie geeignete Funktionen v_h um numerisch die Abhängigkeit $C_{\rm inv} = C_{\rm inv}(p)$ herauszufinden. Plotten Sie ihre Ergebnisse. Kann die inverse Ungleichung auch für bestimmte Funktionen $v \notin \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h)$ gelten? Konstruieren Sie eine Funktionenfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für jede Konstante $C_{\rm inv} > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, welches $\|hv_n'\|_{L^2(a,b)} > C_{\rm inv}\|v_n\|_{L^2(a,b)}$ erfüllt. Warum nennt man obige Abschätzung eigentlich *inverse* Ungleichung.

Aufgabe 5.3. Finden Sie Funktionen $v \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h)$ welche

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \|hv'\|_{L^2(0,1)} \leq C_{\rm inv}\|v\|_{L^2(0,1)} \tag{1}$$

erfüllen. Gibt es eine Konstante $C_{\rm inv} > 0$ und eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welche (1) erfüllt und gleichzeitig eine Basis von $H^1(a,b)$ bildet?

Aufgabe 5.4. Nodale Interpolation I_h ist auf stetige Funktionen beschränkt. Die L^2-orthogonale Projektion Π_h besitzt diese Einschränkung nicht, ist aber deutlich mühsamer zu implementieren. Es gibt aber etwas dazwischen, namens *Clément*-Quasiinterpolation. Seien dafür $x_1, \ldots, x_n$ die Konten des Gitters $\mathcal{T}_h$. Definiere den Operator $C_h : L^2(a,b) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ als

$$C_h u \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \quad \text{und} \quad (C_h u)(x_i) := |x_{i+1} - x_{i-1}|^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\, dx,$$

wobei $x_0 = x_1$ und $x_{n+1} = x_n$ definiert wird. Vergleichen Sie numerisch C_h und I_h für Gitter verschiedener Netzweiten und plotten Sie die Ergebnisse.