

**Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing**

Serie 6

Aufgabe 6.1. Betrachten Sie die Gleichung

$$\begin{aligned} -u'' + u' + u &= f \quad \text{auf } (0, 1), \\ u(0) = 0 &= u(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Statt \mathcal{P}^1 -FEM wollen wir nun \mathcal{P}^2 -FEM verwenden. Sei \mathcal{T}_h ein Gitter auf $(0, 1)$. Als Ansatzraum verwenden wir $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h) := \mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h) \cap C(0, 1)$, also stückweise quadratische, global stetige Polynome von Grad zwei. Ist $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h)$ ein Teilraum des $H^1(0, 1)$? Welche Dimension hat $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h)$? Geben Sie eine Basis des $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h)$ an, die sich zur Berechnung der FEM Matrizen eignet.

Aufgabe 6.2. Stellen Sie die schwache Formulierung von (1) auf und berechnen Sie die Einträge der Galerkin-Matrizen für die Basis aus Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.3. Implementieren Sie \mathcal{P}^2 -FEM für die Gleichung (1). Wie kann man die Implementierung auf Korrektheit prüfen?

Aufgabe 6.4. Testen Sie Ihre Implementierung an der Funktion $u(x) = x(1 - x)$. Berechnen Sie den H^1 -Fehler und auch den H^2 -Fehler der Galerkin-Approximationen auf uniformen Gittern. Welche Konvergenzrate erwarten Sie, welche beobachten Sie.