Michael Feischl
Dirk Praetorius

Sommersemester 2014
12. Mai 2014

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Serie 7

Aufgabe 7.1. Betrachten Sie die Gleichung

$$\begin{aligned} -(au')' + bu' + cu &= f \quad \text{auf } (0,1), \\ u(0) = 0 &= u(1), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $a \in C^1([0,1])$ und $b, c \in C[0,1]$ variable Koeffizienten sind. Stellen Sie die schwache Formulierung auf und geben Sie Schranken $a_0 \leq a \leq a_1$, $b_0 \leq b \leq b_1$, und $c_0 \leq c \leq c_1$ an, welche die eindeutige Lösbarkeit von (1) garantieren. Im Allgemeinen müssen nun auch die Einträge der Galerkinmatrix mit Quadratur berechnet werden. Das bedeutet, man approximiert die Bilinearform $\langle\!\langle u\,;v\rangle\!\rangle$ durch $\langle\!\langle u\,;v\rangle\!\rangle_h$, wobei Letztere durch n-Punkt Gaussquadratur auf jedem Element des Gitters berechnet wird. Geben Sie $\langle\!\langle u\,;v\rangle\!\rangle_h$ an. Was kann man über den Fehler

$$C_h := \sup_{u_h, v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \frac{\langle\!\langle u_h\,;v_h\rangle\!\rangle - \langle\!\langle u_h\,;v_h\rangle\!\rangle_h}{\|u_h\|_{H^1(0,1)}\|v_h\|_{H^1(0,1)}}$$

für $h \to 0$ sagen?

Aufgabe 7.2. Implementieren Sie $\mathcal{P}^1$-FEM mit variablen Koeffizienten für (1). Schreiben Sie eine Funktion die die Koeffizienten a, b, c als `functionhandles` übernimmt und die Matrizen $\mathtt{A}_h$, $\mathtt{K}_h$, $\mathtt{M}_h$ zu $\langle\!\langle u\,;v\rangle\!\rangle_h$ mit n-Punkt Gaussquadratur auf jedem Element von $\mathcal{T}_h$ aufstellt. Es soll die Galerkinlösung $U_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ zu

$$\langle\!\langle U_h\,;V_h\rangle\!\rangle_h = \int_0^1 f V_h\,dx \quad \text{für alle } V_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \tag{2}$$

berechnet werden. Gilt noch die Galerkinorthogonalität

$$\langle\!\langle u - U_h\,;V_h\rangle\!\rangle = 0 \quad \text{für alle } V_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h).$$

Welche Quadraturordnung n ist nötig, um die Lösbarkeit des approximierten Problems (2) für all $h < h_0$ zu garantieren? Zeigen Sie Konvergenz $U_h \to u$ für $h \to 0$, indem Sie das Strang Lemma benutzen.

Aufgabe 7.3. Verwenden Sie die $\mathcal{P}^2$-FEM Methode der letzten Übung. Vergleichen Sie die Konvergenzrate für verschiedene Quadraturordnungen der rechten Seite. Insbesondere soll die Mittelpunktsregel ($n = 1$) mit höheren Quadraturordnungen verglichen werden. Sehen Sie einen Unterschied? Was sagt die Theorie dazu?