

Übungen zur Vorlesung Einführung in Scientific Computing

Serie 8

Aufgabe 8.1. Programmieren Sie eine Funktion `refineMesh`, welche drei Arrays `coordinates`, `elements` (beschreiben das Gitter \mathcal{T}), und `marked` als Parameter übernimmt. Ausgegeben werden sollen die Arrays `coordinates_new`, `elements_new`, und `father2son`. Dabei beschreiben die ersten beiden Ausgabeparameter das Gitter \mathcal{T}' , welches durch Bisektion der Elemente in `marked` entsteht. Das $(\#\mathcal{T} \times 2)$ -Array `father2son` soll folgende Relation enthalten: Wird das Element $T_j \in \mathcal{T}$ halbiert in zwei Elemente $T_k, T_m \in \mathcal{T}'$, dann soll gelten `father2son[j, 1] = k` und `father2son[j, 2] = m`. Wird das Element T_j nicht halbiert, so soll `father2son[j, 1] = father2son[j, 2]` die Nummer des Elementes T_j in \mathcal{T}' enthalten (idealerweise programmiert man die Funktion so, dass die Nummer von nicht verfeinerten Elementen gleich bleibt). Die Funktion soll vollständig vektorisiert sein, also ohne `for`- und `while`-Schleifen auskommen.

Aufgabe 8.2. Implementieren Sie den $(h - h/2)$ -Schätzer $\mu_\ell := \|\widehat{U}_\ell - U_\ell\|_{H^1(0,1)}$. Schreiben Sie eine Funktion welche einen Vektor mit den Elementbeiträgen $\mu_\ell(T)^2 := \|\widehat{U}_\ell - U_\ell\|_{H^1(T)}^2$, $T \in \mathcal{T}_\ell$, zurück gibt. Plotten Sie $\mu_\ell = (\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \mu_\ell(T)^2)^{1/2}$ gemeinsam mit dem H^1 -Fehler Ihrer vorhandenen \mathcal{P}^1 -FEM Implementierung. Was beobachten Sie, was erwarten Sie. Implementieren Sie auch den modifizierten $(h - h/2)$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell := \|(1 - I_\ell)\widehat{U}_\ell\|_{H^1(0,1)}$. Vergleichen Sie beide Schätzer. Die Implementierungen sollen wieder ohne `for`- und `while`-Schleifen, und ohne Quadratur auskommen.

Aufgabe 8.3. Laden Sie sich von der Homepage der VO den Code `adaptive.m`, der den adaptiven Algorithmus aus der VO implementiert. Bauen Sie die fehlenden Funktionen `refineMesh`, `computeHH2` und Ihre Implementierung der \mathcal{P}^1 -FEM für

$$\begin{aligned} -u'' + u' + u &= f \quad \text{auf } (0, 1), \\ u(0) &= 0 = u(1) \end{aligned}$$

ein. Testen Sie den Code für die Lösungen $u_1(x) = x(1-x)$ und $u_2(x) = x^{0.9}(1-x)$. Beobachten Sie einen Unterschied? Was sagt die Theorie dazu?

Aufgabe 8.4. Testen Sie den adaptiven Algorithmus in Sachen Rechenzeit. Generieren Sie ein uniformes Gitter \mathcal{T}_u , auf welchem der Fehlerschätzer $\mu_u \leq 10^{-4}$ erfüllt. Stoppen Sie die Zeit, die benötigt wird, um die Galerkinlösung und den Fehlerschätzer auf \mathcal{T}_u zu berechnen. Der adaptive Algorithmus muss die gesamte Gitterfolge $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_\ell$ berechnen, bis gilt $\mu_\ell \leq 10^{-4}$. Stoppen Sie auch hier wieder die Zeit die dafür nötig ist. Vergleichen Sie die Ergebnisse.