Michael Feischl
Dirk Praetorius

Sommersemester 2014
26. Mai 2014

Übungen zur Vorlesung
Einführung in Scientific Computing

Serie 9

Aufgabe 9.1. Betrachten Sie das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} -(au')' + bu' + cu &= f \quad \text{auf } (0,1), \\ u(0) &= u_0, \\ a(1)u'(1) &= \phi_1, \end{aligned} \tag{1}$$

mit Daten $u_0, \phi_1 \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(0,1)$ und variablen Koeffizienten $a \in C^1([0,1])$ und $b, c \in C[0,1]$. Stellen Sie die schwache Formulierung auf und ändern Sie Ihre Implementierung für das homogene Dirichlet Problem aus Serie 7 so ab, dass auch (1) behandelt werden kann. Führen Sie dazu (1) auf ein Problem mit homogenen Dirichlet Daten zurück, indem Sie das Dirichlet Datum geeignet zu einer Funktion auf $(0,1)$ fortsetzen. Zeigen Sie die eindeutige Lösbarkeit der schwachen Formulierung. Gilt in diesem Fall die Galerkinorthogonalität

$$\langle\!\langle u - U_\ell\,; V_\ell \rangle\!\rangle = 0 \quad \text{für alle } V_\ell \in \mathcal{S}^1_D(\mathcal{T}_\ell)?$$

Aufgabe 9.2. Wie sieht der gewichtete Residualschätzer ρ_ℓ für das gemischte Randwertproblem (1) aus? Beweisen Sie die Zuverlässigkeit des Schätzers und untermauern Sie ihren Beweis mit numerischen Experimenten. Vergleichen Sie dazu Fehler und Residualschätzer auf Gittern mit verschiedenen Netzweiten $h \to 0$.

Aufgabe 9.3. Beweisen Sie die Schätzerreduktion für den gewichteten Residualschätzer aus Aufgabe 9.2. Zeigen Sie, dass Konstanten $0 < q < 1$ und $C > 0$ existieren, welche

$$\rho_{\ell+1}^2 \le q\rho_\ell^2 + C\|U_{\ell+1} - U_\ell\|^2_{H^1(0,1)} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}$$

erfüllen.