Michael Feischl
Dirk Praetorius

Sommersemester 2014
2. Juni 2014

Übungen zur Vorlesung Einführung in Scientific Computing

Serie 10

Aufgabe 10.1. Sei $T_{\rm ref} \subseteq \mathbb{R}^2$ das abgeschossene Referenzdreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Die Duffy-Transformation

$$\Psi:\ [0,1]^2 \to T_{\rm ref},\ (s,t) \mapsto (s,(1-s)t)$$

bildet das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ auf $T_{\rm ref}$ ab. Beweisen Sie, dass $\Psi:\ (0,1)^2 \to T_{\rm ref}^\circ$ ein Diffeomorphismus ist, d.h. bijektiv und sowohl Ψ als Ψ^{-1} sind stetig differenzierbar ($T_{\rm ref}^\circ$ bezeichnet dabei das offene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0),(0,1) \in \mathbb{R}^2$). Überlegen Sie wie der Rand $\partial[0,1]^2$ abgebildet wird

Aufgabe 10.2. Schreiben Sie eine Funktion `gauss_dreieck` welche eine gegebene Funktion $f: T \to \mathbb{R}$ über ein gegebenes Dreieck $T \subseteq \mathbb{R}^2$ integriert (überlegen Sie sich eine praktisches Datenformat um ein Dreieck zu speichern). Gehen Sie dazu wie folgt vor: Bestimmen Sie zuerst eine affine Funktion $\Phi_T:\ T_{\rm ref} \to T$, welche das Referenzdreieck bijektiv auf T abbildet. Die Funktion hat die Form $\Phi_T(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Eckpunkt von T ist. Verwenden Sie nun die Duffy-Transformation um eine bijektive Abbildung $\Phi_T \circ \Psi$ von $(0,1)^2$ auf das Innere von T zu erhalten. Zeigen Sie, dass $\Phi_T \circ \Psi$ auch ein Diffeomorphismus ist. Für das Einheitsquadrat verwenden Sie nun eine gewöhnliche Tensor-Gaussquadratur der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, Sie verwenden die Gausspunkte und Gewichte (x_i, w_i) der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ für das Interval $[0,1]$ und approximieren

$$\int_{[0,1]^2} g(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^1 g(x,y)\,dx\,dy \approx \int_0^1 \sum_{i=0}^n g(x_i,y)w_i\,dy \approx \sum_{j=0}^n\sum_{i=0}^n g(x_i,x_j)w_iw_j,$$

für eine beliebige Funktion $g:\ [0,1]^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.3. Ein Polynom in $\mathbb{R}^2$ ist eine Linearkombination aus Monomen der Form

$$x^{\alpha_x}y^{\alpha_y} \quad \text{für einen Multiindex } \alpha = (\alpha_x,\alpha_y) \in \mathbb{N}_0^2.$$

Wir bezeichnen $\max\{\alpha_x,\alpha_y\}$ als partiellen Grad und $\alpha_x + \alpha_y$ als totalen Grad des Monoms. Welchen Exaktheitsgrad (partiell oder total) hat Ihre Funktion `gauss_dreieck` für gegebene Ordnung $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 10.4. Testen Sie Ihre Funktion `gauss_dreieck` für verschiedene Ordnungen $n \in \mathbb{N}$ auf einer uniformen Triangulierung $\mathcal{T}$ des Einheitsquadrats $[0,1]$ mit maximalem Dreiecksdurchmesser h (Es gibt hier zahlreiche Möglichkeiten). Dabei soll eine summierte Gaussquadratur angewendet werden, also

$$\int_{[0,1]^2} f\,dx \approx \sum_{T\in\mathcal{T}} Q_T(f),$$

wobei $Q_T(\cdot)$ die Funktion `gauss_dreieck` bezeichnet. Welches Konvergenzverhalten des Quadraturfehlers beobachten Sie in Abhängigkeit von h und von n?