Winfried Auzinger
Dirk Praetorius

Sommersemester 2012
13. März 2012

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 2

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche vorzubereiten. Kopieren Sie bitte die Source-Codes auf Ihren Account auf der `lva.student.tuwien.ac.at` *und überprüfen Sie vor der Übung, ob diese mittels* `latex` *übersetzt werden können.*

Aufgabe 2.1*. Schreiben Sie ein LaTeX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$. Speichern Sie Ihre Datei unter `brezzi.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Satz (Brezzi 1974). Es seien X und Y Hilbert-Räume. Ferner seien $a : X \times X \to \mathbb{R}$ und $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen und $X_0 := \big\{x \in X \,:\, b(x,\cdot) = 0 \in Y^*\big\}$. Unter den Voraussetzungen

- $\alpha := \inf\limits_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|_X^2} > 0$, d.h. $a(\cdot,\cdot)$ ist elliptisch auf X_0,
- $\beta := \inf\limits_{y \in Y \setminus \{0\}} \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{b(x,y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} > 0$.

gilt dann folgende Aussage: Für jedes $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ gibt es eine eindeutige Lösung $(x,y) \in X \times Y$ des sogenannten Sattelpunktproblems

$$\begin{array}{lcll} a(x,\widetilde{x}) \;+\; b(\widetilde{x},y) & = & x^*(\widetilde{x}) & \text{for all } \widetilde{x} \in X, \\ b(x,\widetilde{y}) & = & y^*(\widetilde{y}) & \text{for all } \widetilde{y} \in Y. \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 2.2*. Schreiben Sie eine `satz`-Umgebung, die untenstehendes Layout hat. Der Zähler soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Optional soll ein Name für den Satz vergeben werden dürfen. Verwenden Sie diese Umgebung in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils zwei beliebige Sätze aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab. Legen Sie für jeden Satz ein geeignetes `\label` fest. Speichern Sie Ihre Datei unter `satz.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

SATZ 1.1.2. (*Satz von Bolzano-Weierstrass*): In einem endlich-dimensionalen normierten Raum X hat jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 2.3*. Verwenden Sie `\newtheorem`, um eine *Satz*-Umgebung zu erzeugen. Schreiben Sie eine *Beweis*-Umgebung. Der Beweis werde (als Teil der Umgebung) mit fett-kursiv ***Beweis*** eingeleitet. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem `\blacksquare` $\blacksquare$ angezeigt, d.h. $\blacksquare$ steht rechtsbündig in der letzten Zeile des Beweises. Formulieren Sie den folgenden Satz inkl. ausführlichem Beweis in LaTeX. Speichern Sie die Datei unter `stetig.tex` ins Verzeichnis `serie02`:

Satz 1. *Für eine stetige Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist gleichmäßig stetig.*

(ii) *f erlaubt eine stetige Fortsetzung aufs kompakte Intervall $[a,b]$, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\widehat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\widehat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.*

In diesem Fall ist die stetige Fortsetzung $\widehat{f}$ sogar eindeutig.

Aufgabe 2.4*. Schreiben Sie eine `myenumerate`-Umgebung mit zugehörigem Zähler, das für den Code

```
\begin{myenumerate}
  \myitem A, $\alpha$
  \myitem B, $\beta$
  \myitem $\Gamma$, $\gamma$
\end{myenumerate}
```

das folgende Ergebnis liefert

(*i*) A, α
(*ii*) B, β
(*iii*) Γ, γ

wobei die Numerierung mit römischen Zahlen automatisch erfolgt. Bauen Sie auf der `itemize`-Umgebung auf. Schreiben Sie dazu ein Makro `\myitem`, welches den Befehl `\item` geeignet verwendet. Schreiben Sie die 24 Buchstaben des griechischen Alphabets in diese Umgebung. Beachten Sie, dass die griechischen Großbuchstaben nur dann als eigene LaTeX-Befehle vorliegen, wenn Sie *nicht* mit den lateinischen übereinstimmen. Speichern Sie Ihre Datei unter `enumerate.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.5. Verwenden Sie das ifthen-Paket und schreiben Sie eine `greekenumerate`-Umgebung, sodass

```
\begin{greekenumerate}
  \myitem A
  \myitem B
  \myitem C
\end{greekenumerate}
```

das folgende Ergebnis liefert

(α) A
(β) B
(γ) C

führt. Es reicht, wenn Sie die ersten 5 griechischen Buchstaben berücksichtigen. Speichern Sie Ihre Datei unter `greekenumerate.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.6. Informieren Sie sich im WWW über die `list`-Umgebung. Schreiben Sie mittels dieser eine `myitemize`-Umgebung, so dass

```
\begin{myitemize}
  \item A
  \item B
  \item C
\end{myitemize}
```

das folgende Ergebnis liefert

$\bigstar$ A
$\bigstar$ B
$\bigstar$ C

führt. Das Symbol $\bigstar$ erzeugt man mittels `$\bigstar$`. Speichern Sie Ihre Datei unter `myenumerate.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.7. Die Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liege in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

vor mit $L_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Sind L_{11} und L_{22} regulär, so ist L regulär, und die Inverse ist gegeben durch

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie diese Aussage inklusive Beweis in LaTeX. Speichern Sie Ihre Datei unter `inverse.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.8. Schreiben Sie folgende Definition: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$ und eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist der Raum $C^{k,\lambda}(\Omega)$ der hölderstetigen Funktionen durch

$$C^{k,\lambda}(\Omega) := \big\{ f \in C^k(\Omega) \,\big|\, \|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} < \infty \big\}$$

definiert. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)}$ die entsprechende Höldernorm

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq k}} \|\partial^\alpha f\|_{\infty,\Omega} + \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| = k}} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Offensichtlich ist $C^{0,1}(\Omega)$ gerade der Raum aller Lipschitz-stetigen Funktionen. Man kann zeigen, dass $C^{k,\lambda}(\Omega)$ mit der entsprechenden Norm ein Banach-Raum ist. Speichern Sie Ihre Datei unter `hoelderraum.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.9. Definieren Sie über den Befehl `\newtheorem` Umgebungen für Satz, Lemma und Folgerung. Dabei soll nur ein Zähler für alle drei Umgebungen verwendet werden. Die Zählung erfolge kapitelweise in der Form 2.1, 2.2, etc. Schreiben Sie einen beliebigen Satz inklusive seiner Folgerung(en) aus der Vorlesung zur Linearen Algebra ab, wobei alle Referenzen dynamisch sein sollen. Speichern Sie Ihre Datei unter `newtheorem.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.10. Schreiben Sie in LaTeX den Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Speichern Sie Ihre Datei unter `sqrt.tex` ins Verzeichnis `serie02`.