Winfried Auzinger
Dirk Praetorius

SS 2012
24. April 2012

Übungsaufgaben zur VU Computermathematik
Serie 6

Aufgabe 6.1*. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + \sqrt{x^6}}}$$

und produzieren Sie einen sinnvollen gestalteten Plot, der die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in einer gemeinsamen Grafik darstellt ($x \in (0,1]$).

Hinweis: `?plot`. Verwenden Sie auch `plots[display]` (aus dem `plots`-package) zum gleichzeitigen Anzeigen mehrerer plots `p[i]`, die man zuvor mittels `p[i] := plot(...):` generiert hat.

Was heißt 'sinnvoll gestaltet'? – Der Verlauf der drei geplotteten Funktionen soll gut erkennbar sein.

Aufgabe 6.2*. Erstellen Sie eine Prozedur

```
rtaylor(expression,a,n)
```

die auf `taylor` basiert und die Taylor-Entwicklung von `expression` um die Stelle `a` der Länge `n` berechnet. Jedoch:

- Im Fall $a \neq 0$ sollen statt die Potenzen $(x-a)^k$ in der Form h^k ausgegeben werden ($x = a + h$). Dafür verwendet man `subs`.
- Der Restgliedterm $O(\ldots)$ soll entfernt und durch seine ausgewertete Integraldarstellung ersetzt werden.

Hinweis: `taylor` hat eine flexiblere Parameterliste mit optionalen Argumenten, etc. Das wird hier jedoch nicht berücksichtigt. Sie rufen `taylor` intern in der Form `taylor(expression,a,n)` auf.

Satz von Taylor mit Integralrestglied:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-\xi)^{n-1} f^{(n)}(a+\xi h)\, d\xi$$

Aufgabe 6.3*. Die Funktionenfolge $f_n(z)$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$f_0(z) := \frac{e^z - 1}{z}$$

und für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(z) := \frac{1}{z}\Big(-1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(z)}{n-k}\Big).$$

Erstellen Sie eine rekursive Prozedur `f_rec(z,n)`, die die $f_n(z)$ auswertet. (Verwenden Sie auch `simplify`.)

Anmerkung: Die Definition der $f_n(z)$ ist voll-rekursiv, d.h. für die Berechnung von $f_n(z)$ werden alle $f_k(z)$ für $k < n$ benötigt.

Wie testet man das auf Korrektheit? Überlegen Sie (für kleinere Werte von n).

Aufgabe 6.4*. Die Funktionen $f_n(z)$ aus Aufgabe 6.4 scheinen an der Stelle $z = 0$ nicht definiert zu sein (wegen des Faktors $1/z$). Allerdings is $f_0(z)$ an der Stelle $z = 0$ stetig fortsetzbar, wie man sich leicht per Hand oder mittels `limit` bzw. `taylor` überzeugt. Dies gilt sogar für alle n; prüfen Sie dies für einige Werte von `n` nach. (Der Beweis dieser Tatsache wäre nicht ganz einfach.)

Erstellen Sie auch eine Liste der (mittels stetiger Fortsetzung erhaltenen) Werte $f_n(0)$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Aufgabe 6.5*. In Prozeduren sind auch variable Parameterlisten (z.B. mit optionalen Parametern) möglich (VO: später). Man kann jedoch so etwas auch selbst basteln, indem man einen einzigen Parameter als Liste von Werten übergibt und mittels `nops(...)` die Länge der übergebenen Liste abfragt.

Verwenden Sie dies für eine Prozedur `myint(L)`, die folgendes ausführt:

- Im Fall `nops(L)` $= 0$ (`L=[]`) wird nichts zurückgegeben.
- Im Fall `nops(L)` $= 1$ wird `L[1]` als Formelausdruck interpretiert und bezüglich der Variablen `x` integriert.
- Im Fall `nops(L)` $= 2$ wird zusätzlich `L[2]` als Variablenname interpretiert, und es wird bezüglich dieser Variablen integriert.
- Im Fall `nops(L)` $= 3$ werden `L[2]` und `L[3]` als Grenzen für ein bestimmtes Integral interpretiert, und dieses wird berechnet.
- Der Fall `nops(L)` $= 4$ wird wie `nops(L)` $= 3$ interpretiert, jedoch wird das berechnete Integral mittels `evalf` numerisch approximiert. Dabei wird `L[4]` als Auswertegenauigkeit (Anzahl der Dezimalstellen) verwendet (siehe `? evalf`).
- Im Fall `nops(L)` > 4 wird eine Fehlermeldung (als String) ausgegeben und kein Wert zurückgeliefert.

Anmerkung: Ein professioneller Code würde die übergebenen Parameter auf Korrektheit testen. Darauf verzichten wir hier (in VO: später).

Aufgabe 6.6. Unendliche Folgen (a_n) repräsentiert man mittels Funktionen des Parameters n. Durch eine Folge (a_n) ist (mindestens formal) eine unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

definiert. Das *Cauchy-Produkt* zweier derartiger Reihen, definiert durch zwei Folgen (a_n) und (b_n), ist definiert als die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{mit} \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}.$$

Erstellen Sie eine Prozedur `cp_coeff(a,b,n)`, die zu zwei gegebenen Funktionen `a` ($\to (a_n)$) und `b` ($\to (b_n)$) den Wert c_n zurückliefert. Verwenden Sie dies dazu, um das Cauchy-Produkt zweier geometrischer Reihen ($a_n = p^n$, $b_n = q^n$) auszuwerten (möglichst einfache Darstellung anstreben). (Diese drei Reihen sind nur konvergent für $|p| < 1$ und $|q| < 1$, d.h. nur in diesem Fall ist das Ergebnis 'richtig'. Maple rechnet aber mit Reihen oft in rein formaler Weise.)

Aufgabe 6.7. Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle der Länge $h = 1/n$. Sei $x_i := a + i\,h$, $i = 0 \ldots n$. Zu bestimmen ist das Polynom $p(x)$ vom Grad n, das eine gegebene Funktion $f(x)$ an $x_0, x_1, \ldots, x_n$ interpoliert, d.h. es soll gelten $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \ldots n$.

Eine Darstellung für $p(x)$ lautet wie folgt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)$$

mit den sogenannten Lagrange-Polynomen

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \qquad (\text{also: } L_i(x_j) = \delta_{i,j}.)$$

Erstellen Sie eine Prozedur `interpol(f,a,b,n)`, die den Formelausdruck für $p(x)$ berechnet und zurückgibt. Wählen Sie ein Beispiel und plotten Sie $f(x)$ und $p(x)$ (siehe Hinweis zu Aufgabe 6.1).

Hinweis: Einen polynomialen Ausdruck in x vereinfacht man am besten mittels `collect(...,x)`, dann erhält man die übliche, nach Potenzen von x geordnete Darstellung.

Aufgabe 6.8. Fortsetzung von Aufgabe 6.7:

Mittels Interpolation kann z.B. auch bestimmte Integrale approximieren ('numerische Quadratur'):

$$I(f) := \int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b p(x)\, dx =: Q(f),$$

wobei p das Interpolationspolynom zu f ist. Wählen Sie $[a,b]=[0,1]$ und erstellen Sie eine Prozedur `quadcoeff(n)`, die eine Liste von Koeffizienten $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n\in\mathbb{R}$ zurückliefert, so dass gilt

$$Q(f)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i).$$

Die ω_i sind unabhängig von f, und die Formel muss für Polynome f vom Grad $\le n$ den exakten Wert $I(f)$ liefern (testen Sie das aus).

Beispiel: Für $n=3$ erhält man $[\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3]=[\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}]$ ('Newton-Formel').

Anmerkung: Verwenden Sie *nicht* die Prozedur `interpol` aus Aufgabe 6.7, sondern generieren Sie die ω_i direkt, basierend auf der Lagrange-Darstellung für $p(x)$.

Die Indizierung von Listen beginnt mit 1, was hier etwas unpraktisch ist (der erste Eintrag ist ω_0). Man würde hier in der Praxis eher mit einem `Array` statt einer Liste arbeiten (in VO: später).

Aufgabe 6.9. Die Polynome $p_0(x),p_1(x),p_2(x),\ldots$ seien durch folgende Rekursion definert:

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1,\\ p_1(x) &:= x-\beta_0,\\ p_{n+1}(x) &:= (x-\beta_n)p_n(x)-\gamma_n\,p_{n-1}(x), \quad n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\beta_n=\frac{\langle xp_n(x),p_n(x)\rangle}{\langle p_n(x),p_n(x)\rangle}\,,\quad \gamma_n=\frac{\langle p_n(x),p_n(x)\rangle}{\langle p_{n-1}(x),p_{n-1}(x)\rangle}\,,\quad \text{wobei}\quad \langle f(x),g(x)\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Implementieren Sie diese Rekursion in Maple und generieren Sie die $p_n(x)$, z.B. bis hinauf zu $n=5$.

Zum Test verwenden Sie das package `orthopoly` (aktivieren mit `with(orthopoly);`), und vergleichen Ihre Polynome $p_n(x)$ mit den dort vordefinierten Polynomen `P(n,x)`. Diese müssen überstimmen, abgesehen davon, dass der Koeffizient von $p_n(x)$ bei x^n genau 1 ist, bei `P(n,x)` jedoch nicht (d.h., diese beiden Polynome unterscheiden sich um einen konstanten Faktor).

Die $p_n(x)$ heißen *Legendre-Polynome*. Die Rekursion für die $p_n(x)$ entspricht einer Orthogonalisierung der Monome $\{1,x,x^2,\ldots\}$ bezüglich des inneren Produktes $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, und daher gilt

$$\langle p_m(x),p_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)\,dx = 0 \quad \text{für}\quad m\ne n.$$

Prüfen Sie dies für einige Werte von m und n nach.

Aufgabe 6.10. Maple-Worksheets können per Menü,

File > Export As… > LaTeX

in LaTeX - Code umgewandelt werden. Für die Weiterverarbeitung mittels LaTeX sind (auf lva.student) die mitgelieferten style-Files mittels

```
$ export TEXINPUTS=:/usr/local/maple15/etc
```

zu aktivieren.

Exportieren Sie eines Ihrer Worksheets und übersetzen Sie es mit LaTeX. Für gute Qualität ist dann meist noch etwas manuelle Nachbearbeitung erforderlich. Produzieren Sie eine schöne LaTeX-Version.

Hinweis: In Ihrer eigenen Maple-Version finden Sie die style-Files (`maple2e.sty`, etc.) im Verzeichnis der Maple-Installation, z.B. `C:\Programme\Maple15\ETC\`.