Winfried Auzinger
Dirk Praetorius

Sommersemester 2013
07. Juli 2013

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 10

Aufgabe 10.1. Schreiben Sie ein LaTeX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$.

Satz (Brezzi 1974). Es seien X und Y Hilbert-Räume. Ferner seien $a : X\times X \to \mathbb{R}$ und $b : X\times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen und $X_0 := \big\{x \in X \,:\, b(x,\cdot) = 0 \in Y^*\big\}$. Unter den Voraussetzungen

- $\alpha := \inf\limits_{v\in X_0\setminus\{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|_X^2} > 0$, d.h. $a(\cdot,\cdot)$ ist elliptisch auf X_0,
- $\beta := \inf\limits_{y\in Y\setminus\{0\}} \sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}} \dfrac{b(x,y)}{\|x\|_X\|y\|_Y} > 0.$

gilt dann folgende Aussage: Für jedes $(x^*,y^*) \in X^*\times Y^*$ gibt es eine eindeutige Lösung $(x,y) \in X\times Y$ des sogenannten Sattelpunktproblems

$$\begin{array}{lcll} a(x,\widetilde{x}) \;+\; b(\widetilde{x},y) & = & x^*(\widetilde{x}) & \text{for all } \widetilde{x}\in X, \\ b(x,\widetilde{y}) & = & y^*(\widetilde{y}) & \text{for all } \widetilde{y}\in Y. \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 10.2. Schreiben Sie eine `satz`-Umgebung, die untenstehendes Layout hat. Der Zähler soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Optional soll ein Name für den Satz vergeben werden dürfen. Verwenden Sie diese Umgebung in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils zwei beliebige Sätze aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab. Legen Sie für jeden Satz ein geeignetes `\label` fest.

Satz 1.1.2 (Bolzano-Weierstrass). In einem endlich-dimensionalen normierten Raum X hat jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 10.3. Legen Sie mittels `\newtheorem` eine Umgebung für Lemmata an. Der Beweis werde (als Teil der Umgebung) mit fett-kursiv ***Beweis*** eingeleitet. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem `\blacksquare` $\blacksquare$ angezeigt, d.h. $\blacksquare$ steht rechtsbündig in der letzten Zeile des Beweises. Formulieren Sie die folgende Aussage als Lemma, beweisen Sie dieses mit Techniken der Linearen Algebra und schreiben Sie Lemma und Beweis in LaTeX, wobei alle auftretenden Referenzen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden sollen: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\sum_{j,k=1}^n x_j A_{jk} x_k > 0$ für all $x\in\mathbb{R}^n$, so ist A regulär.

Aufgabe 10.4. Mit Hilfe der vorausgegangenen Aufgabe kann man das *Lemma von Lax-Milgram* im Fall endlich-dimensionaler Räume beweisen: Es sei X ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{v_1,\dots,v_n\}$, $F : X \to \mathbb{R}$ linear und $a(\cdot,\cdot) : X\times X\to\mathbb{R}$ eine Bilinearform auf X, d.h. $a(\cdot,\cdot)$ ist linear in beiden Komponenten. Es gelte zusätzlich $a(v,v) > 0$ für alle $v \in X$. Dann gibt es ein eindeutiges $u\in X$ mit $a(u,v) = F(v)$ für alle $v\in X$. Um dies zu beweisen, macht man den Ansatz $u = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ und zeigt, dass der Koeffizientenvektor $x\in\mathbb{R}^n$ eindeutig existiert. Formulieren Sie das Lemma von Lax-Milgram als Satz inklusive Beweis in LaTeX und erweitern Sie das Dokument aus der vorausgegangen Aufgabe, wobei Sie mittels `\newtheorem` eine Umgebung für Sätze generieren, die fortlaufend mit den Lemmata numeriert wird. Alle auftretenden Referenzen sollen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden.

Aufgabe 10.5. Drei natürliche Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ heißen *pythagoräisches Zahlentripel*, wenn $a^2+b^2 = c^2$ gilt. Beweisen Sie mit Hilfe des Ansatzes $a := m^2 - n^2$ und $b := 2mn$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$, dass es unendlich viele pythagoräische Zahlentripel gibt. Schreiben Sie diese Beobachtung als Satz mit Beweis in LaTeX. Fügen Sie ferner eine Tabelle an, in der Sie in der Art

a	b	c
3	4	5

mindestens 5 pythagoräische Zahlentripel tabellieren.

Aufgabe 10.6. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `pythagoras`, die für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und Dateinamen `name` insgesamt n verschiedene pythagoräische Zahlentripel berechnet. Das Ergebnis soll in Form einer LaTeX Tabelle in die Datei `name.tex` geschrieben werden. Schreiben Sie zusätzlich ein LaTeX-Dokument, das eine derart erzeugte Tabelle mittels `\input{name.tex}` einbindet.

Aufgabe 10.7. Informieren Sie sich im WWW über die `list`-Umgebung. Schreiben Sie mittels dieser eine `myitemize`-Umgebung, so dass

```
\begin{myitemize}
  \item A
  \item B
  \item C
\end{myitemize}
```

das folgende Ergebnis liefert

- $\bigstar$ A
- $\bigstar$ B
- $\bigstar$ C

Das Symbol $\bigstar$ erzeugt man mittels `$\bigstar$`.

Aufgabe 10.8. Die Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liege in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

vor mit $L_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Sind L_{11} und L_{22} regulär, so ist L regulär, und die Inverse ist gegeben durch

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie diese Aussage inklusive Beweis in LaTeX.