Winfried Auzinger
Dirk Praetorius
Michele Ruggeri

Sommersemester 2014
27. Mai 2014

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 1

Aufgabe 1.1. Schreiben Sie einen Text Ihrer Wahl mit Überschrift und mindestens 400 Worten in LaTeX. Als Schriftgröße wählen Sie 12pt. Der Text soll mindestens zwei Absätze umfassen. Was bedeutet die Warnung `Overfull hbox`? Modifzieren Sie ggf. den Text so, dass LaTeX diese Warnung zurückgibt. Schauen Sie sich die erzeugte log-Datei `name.log` an und bereiten Sie vor, den Inhalt der Datei in der Übung erklären zu können. Wie müsste man den Text modifizieren, um die Warnung `Overfull hbox` zu vermeiden? (Verwenden Sie dazu `\-` bzw. `\linebreak`. Was ist der Unterschied zwischen `\linebreak` und `\newline`?) Geben Sie in einer Fußnote `\footnote{...}` die Referenz an, von wo Sie den Text entnommen haben.

Aufgabe 1.2. Schreibt man den Befehl `\renewcommand{\familydefault}{\sfdefault}` in den Kopf des LaTeX-Dokuments, so wird als Standardschrift nicht „Times New Roman“, sondern „Arial“ gewählt. Modifizieren Sie die Datei `text.tex` aus der vorausgegangenen Aufgabe, sodass zum einen die Standardschriftart eine andere ist und zum anderen $1,5$ Zeilenabstand verwendet wird. Gliedern Sie den Text in mindestens 2 Sections und erzeugen Sie ein Inhaltsverzeichnis. Welche Bedeutung hat die automatisch erzeugte Datei `arial.toc`? Warum muss man das Dokument mehrfach mit LaTeX übersetzen, bis das Inhaltsverzeichnis korrekt erzeugt ist.

Aufgabe 1.3. Realisieren Sie die folgende Gleichung

$$A = \begin{pmatrix} \beta_0 & -\gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_1 & \beta_1 & -\gamma_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\gamma_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma_n \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma_n & \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}_{\text{sym}}$$

in LaTeX. Die Punkte werden mittels `\cdots`, `\vdots` und `\ddots` erstellt. Das Symbol $\times$ erhält man durch `\times`.

Aufgabe 1.4. Schreiben Sie eine `satz`-Umgebung, die untenstehendes Layout hat. Der Zähler soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Optional soll ein Name für den Satz vergeben werden dürfen (z.B. Aufruf mit `\begin{satz}[Bolzano-Weierstrass]...\end{satz}`. Verwenden Sie diese Umgebung in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Generieren Sie ein Inhaltsverzeichnis. Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils zwei beliebige Sätze aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab (mindestens einer davon mit Name). Legen Sie für jeden Satz ein geeignetes `\label` fest.

Satz 1.1.2 von Bolzano-Weierstrass. In einem endlich-dimensionalen normierten Raum X hat jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 1.5. Beim Übersetzen der LaTeX-Datei `uebung.tex` aus Aufgabe 1.4 werden automatisch gewisse Dateien erzeugt (z.B. `uebung.aux`, `uebung.log`, `uebung.toc` etc.) Was ist die Bedeutung dieser Dateien? Was ist ihre Aufgabe?

Aufgabe 1.6. Schreiben Sie ein LaTeX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$. **Hinweis.** Für die ausgerichtete Formel in (1) können Sie die `array`-Umgebung verwenden.

Satz (Brezzi 1974). Es seien X und Y Hilbert-Räume. Ferner seien $a : X \times X \to \mathbb{R}$ und $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen und $X_0 := \big\{x \in X \,:\, b(x,\cdot) = 0 \in Y^*\big\}$. Unter den Voraussetzungen

- $\alpha := \inf\limits_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|_X^2} > 0$, d.h. $a(\cdot,\cdot)$ ist elliptisch auf X_0,
- $\beta := \inf\limits_{y \in Y \setminus \{0\}} \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{b(x,y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} > 0.$

gilt dann folgende Aussage: Für jedes $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ gibt es eine eindeutige Lösung $(x,y) \in X \times Y$ des sogenannten Sattelpunktproblems

$$\begin{array}{lclll} a(x,\widetilde{x}) \;+\; b(\widetilde{x},y) & = & x^*(\widetilde{x}) & \quad \text{for all } \widetilde{x} \in X, \\ b(x,\widetilde{y}) & = & y^*(\widetilde{y}) & \quad \text{for all } \widetilde{y} \in Y. \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 1.7. Verwenden Sie `\newtheorem`, um eine *Satz*-Umgebung zu erzeugen. Schreiben Sie eine *Beweis*-Umgebung. Der Beweis werde (als Teil der Umgebung) mit fett-kursiv ***Beweis*** eingeleitet. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem `\blacksquare` $\blacksquare$ angezeigt, d.h. $\blacksquare$ steht rechtsbündig in der letzten Zeile des Beweises. Formulieren Sie den folgenden Satz inkl. ausführlichem Beweis in LaTeX. **Hinweis.** Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) haben Sie sicherlich in der Analysis-1-Vorlesung gesehen. Für die Umkehrung (i) $\Rightarrow$ (ii) erinnere man sich daran, dass gleichmäßig stetige Funktionen Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen abbilden.

Satz 1. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist gleichmäßig stetig.*

(ii) *f erlaubt eine stetige Fortsetzung aufs kompakte Intervall $[a,b]$, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\widehat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\widehat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.*

In diesem Fall ist die stetige Fortsetzung $\widehat{f}$ sogar eindeutig.

Aufgabe 1.8. Beweisen Sie die folgende Aussage und formulieren Sie Aussage und Beweis in LaTeX: Die Wurzel $\sqrt{n}$ einer natürlichen Zahl ist entweder natürlich oder irrational, d.h. $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.